<u>ERGODICIDAD EN EMCANICA ESTADISTICA</u>.

Luis Navarro
Josep Manuel Parra

Departament de Física Teòrica
Universitat de Barcelona

INDICE

INTRODUCCION.

1. LA HIPOTESIS ERGODICA Y EL PROBLEMA DE LA FUNDAMENTACION DE LA MECANICA ESTADISTICA.

La Teoría Ergódica tiene su origen histórico en el desarrollo de la Teoría Cinética de los gases por parte de Boltzmann y Maxwell. En el curso de sus trabajos,y con el fin de establecer una prueba directa del Principio de Equipartición a partir de los principios de la Mecánica,postularon,o dieron por supuestas,ciertas propiedades de los sistemas de muchas partículas. En la medida en que no intentaron demostrar la existencia o no de tales propiedades,poca fue su contribución a lo que hoy llamamos "Teoría Ergódica". Decisivo fue,sin embargo,su reconocimiento de que es preciso suponer determinadas condiciones restrictivas acerca del comportamiento dinámico del sistema a tiempos grandes, a fin de que las leyes del equilibrio macroscópico resulten de la aplicación de las leyes mecánicas a los componentes elementales. Los investigadores posteriores en dicho campo los consideran como fundadores de la Teoría Ergódica tanto por su intuición acerca de la naturaleza específica de tales condiciones,como por haber abierto la posibilidad de fundamentar enteramente la Termodinámica en la Mecánica. Oportuno es,pues,examinar someramente cuáles fueron las formulaciones originales de Maxwell y Boltzmann sobre el "problema ergódico",tan frecuentemente desvirtuadas al reseñarlas en forma simplificada en un contexto teórico moderno.

En 1871 Boltzmann,extrapolando los resultados de su análisis de las figuras de Lissajous correspondientes a pares de frecuencias inconmensurables,formula la siguiente hipótesis sobre un sistema de partículas de gas:

> " La gran irregularidad del movimiento térmico,y la multiplicidad de fuerzas que actúan sobre el cuerpo desde el exterior,hacen probable que los propios átomos,en virtud del movimiento que llamamos calor,pasen a través de todas las posibles posiciones y velocidades consistentes con la ecuación de la energía cinética." [1]

En 1879 Maxwell,en forma mucho más precisa,afirma que:

> " La única suposición que es necesaria para la prueba directa del Principio de Equipartición es que el sistema,abandonado a sí mismo en su estado presente de movimiento,pasará,más pronto o más tarde,a través de cualquier fase que sea consistente con la ecuación de la energía."

Pero,a continuación de dicha formulación que ha sido considerada "paradigmática" y,como tal,expuesta a menudo como una síntesis final de las concepciones de Maxwell y Boltzmann al respecto,pasa a la consideración de casos en que manifiestamente ello no puede ocurrir. Y el propio Maxwell concluye:

" Si suponemos, en cambio, que las partículas materiales encontrarán finalmente un obstáculo fijo, como las paredes del recipiente que las contiene, entonces, excepto para formas especiales de la superficie de dicho obstáculo, cada encuentro introducirá una perturbación en el movimiento del sistema, de tal forma que pasará de una trayectoria no perturbada a otra (conservación de la energía pero no del momento en tales colisiones). Es difícil, en un caso de tan extrema complejidad, llegar a una conclusión completamente satisfactoria pero, con considerable grado de confianza, podemos afirmar que, excepto para formas particulares de la superficie del obstáculo fijo, el sistema pasará, tarde o temprano, tras un número suficiente de encuentros, por cada fase consistente con la ecuación de la energía." [1]

De las citas anteriores se desprende que ni Boltzmann ni Maxwell creían, como frecuentemente se afirma, que la dinámica hamiltoniana de un sistema aislado es tal que su trayectoria cubre toda la región del espacio de las fases permitida por el Principio de Conservación de la Energía. Así, Boltzmann cree necesario y justificado apelar al inevitable efecto que sobre la trayectoria real del sistema tendrán fuerzas exteriores aleatorias, cuya multiplicidad indiferenciada escapa al análisis. Al caracterizar de este modo, y al nivel microscópico, la interacción entre un sistema y su entorno, se anticipa a los modernos tratamientos mediante procesos estocásticos (p.ej. mediante ecuaciones de Langevin). Asimismo inicia el camino que le llevará a prescindir, en sus "Lecciones sobre la Teoría de los Gases", de todo intento de fundamentación "ergódico-mecanicista". Maxwell, por el contrario, se mantiene enteramente en el marco de la Mecánica. Para él el recorrido por toda la región de energía constante resulta del incesante cambio de trayectoria hamiltoniana. Un cambio que debe entenderse como el resultado de proyectar, sobre el subespacio fásico del sistema de interés, una única trayectoria dinámica correspondiente a un sistema mucho más amplio. En este sentido, la formulación de Maxwell apunta hacia la construcción de modelos mecanicistas, y está en consonancia con recientes realizaciones de la Teoría Ergódica como la prueba de Sinai [2] de la ergodicidad de un gas de esferas duras.

A los comentarios ya realizados cabe añadir el cuidado con que debe interpretarse la frase: "el paso por cada fase consistente con la ecuación de la energía". La distinción entre curva que cubre el espacio (p.ej. la curva de Peano, descubierta en 1890) y curvas densas en él (p. ej. las que vendrán a llamarse trayectorias cuasi-ergódicas) sólo se hizo posible gracias al desarrollo matemático posterior. Todo intento de encasillar como "ergódicas" o "cuasi-ergódicas" las hipótesis de Maxwell, Boltzmann y otros físicos de la época sólo puede conducirnos a una imagen no fidedigna de sus ideas.

No cabe pues, contra lo que sugieren P. y T. Ehrenfest en 1911 [3], hablar en rigor de un desarrollo histórico que parte de la "primitiva hipótesis ergódica" (*) como base de fundamentación de la Mecánica Estadística. Hipótesis ésta cuya falsedad terminará por demostrarse, conduciendo inevitablemente a un repliegue a la menos exigente hipótesis cuasi-ergódica que, a la postre, resultará insuficiente para justificar la validez del Teorema de Equipartición. Con ello, de acuerdo con la línea de P. y T. Ehrenfest, la fundamentación de la M. E. debería basarse en una adecuada axiomatización de la Teoría Cinético-Estadística.

El desarrollo matemático de comienzos del presente siglo en torno a la teoría de la cardinalidad de Cantor, la teoría de la dimensión de Riemann y, finalmente, la teoría de la medida desarrollada por Borel y Lebesgue, hicieron posible un enunciado más preciso de la "primitiva hipótesis ergódica", ofreciendo además los instrumentos, de los que Maxwell y Boltzmann habían carecido, para demostrar la validez o falsedad de dicho tipo de enunciados. Comenzó así la etapa de desarrollo de la Teoría Ergódica propiamente dicha, cuya referencia histórica será el objeto del siguiente apartado. Por otro lado, la creciente infiltración de elementos estadísticos en casi todos los conceptos físicos y la creciente importancia del experimento sobre colectividades de sistemas igualmente preparados como herramienta en la investigación física, hicieron que, desde principios de siglo, las perspectivas de fundamentación de la M. E. se dirigieran, mayoritariamente, hacia cuestiones esenciales de la Teoría de la Probabilidad, desvinculándola del problema ergódico y rebajando consiguientemente el interés físico del mismo.

No obstante, los ulteriores desarrollos matemáticos de la Teoría Ergódica, y en concreto los grandes teoremas ergódicos de Birkhoff y von Neumann en la década de los 30 así como la más reciente demostración de Sinaî antes mencionada, han hecho reconsiderar el valor de la Teoría Ergódica como conexión entre una teoría fundamental (la Mecánica de Partículas) y una teoría fundamentada (la Mecánica Estadística del Equilibrio). En la medida que tal reconsideración no ha desembocado en una rigurosa fundamentación de la M. E. opinamos es exagerado afirmar, como algunas veces se hase, que "la M. E. se basa en la Teoría Ergódica". También la axiomática probabilística dista de dar una respuesta aceptable para todos del por-qué de los métodos de la M. E. y las peculiaridades del comportamiento macroscópico. A los cien años de la formulación de Maxwell se han dado pasos sustanciales en la comprensión de los problemas de fundamentación, pero la controversia Boltzmann-Maxwell (Teoría de la Probabilidad o azar esencial en oposición a determinismo mecanicista) continúa abierta, extendiéndose incluso a otros campos de la Física (Teoría de la medida en Mecánica Cuántica).

(*) Por primitiva hipótesis ergódica suele entenderse el enunciado que figura en la primera parte de la anterior cita de Maxwell, sin tener en cuenta la segunda parte donde, en nuestra opinión, Maxwell expone los obstáculos con que se debe enfrentar la Teoría Ergódica y hace irrelevante la demostración de que una trayectoria hamiltoniana no puede cubrir todo el espacio.

En el hoy restringido marco de la Mecánica Estadística Clásica, la solución ofrecida por el teorema ergódico-probabilístico de Khinchin [4], aún sin ser plenamente satisfactoria, merece especial atención. De hecho, constituye una alternativa realista para todos aquellos que, sin desentenderse de los problemas de fundamentación de las técnicas que usan, se sienten inclinados hacia una posición intermedia entre los que creen poder deducir enteramente el comportamiento macroscópico a partir de las leyes de evolución microscópicas y los que, partidarios de una Termodinámica empírica, afirman la futilidad de todo intento de tal naturaleza.

2. DESARROLLO HISTORICO DE LA TEORIA ERGODICA

Como primer resultado importante hay que señalar la demostración, llevada a cabo en 1913 independientemente por M. Plancherel y A. Rosenthal [5], de que la trayectoria de un sistema hamiltoniano aislado no puede recorrer todos los puntos de la hipersuperficie de energía constante Σ_E del espacio de las fases. Intuitivamente el resultado es consecuencia de la imposibilidad de definir una tangente única en cada punto de una tal curva. En lenguaje algo más riguroso, la primitiva hipótesis ergódica equivale a exigir que la aplicación contínua $R_t \to \Sigma_E$, definida por las ecuaciones de Hamilton, sea exhaustiva. Pero una tal aplicación contínua no puede ser biyectiva, precisamente por ser R_t y Σ_E variedades de distinta dimensión (*). Por tanto, existirá al menos un punto de Σ_E al que le corresponderán dos o más tiempos ; en tales puntos la trayectoria se cortará a sí misma, con la consiguiente indefinición de la tangente. Una tal trayectoria ergódica no puede resultar, pues, de la aplicación de las ecuaciones de Hamilton.

Posteriormente a dicho resultado de carácter negativo Fermi, en 1923 [6], demostró para los llamados "Kanonische Normalsysteme" la validez de la hipótesis cuasi-ergódica :"la trayectoria del punto representativo pasa, en el transcurso del tiempo, no por cada punto, sino arbitrariamente cerca de todo punto de la hipersuperficie Σ_E" [7]. En otras palabras, la trayectoria es densa por doquier en Σ_E . Con todo, tal propiedad resultó insuficiente para asegurar la igualdad requerida entre los promedios temporal y de fase. El planteamiento del problema ergódico en términos de las propiedades de la trayectoria hamiltoniana recorrida por un sistema aislado debía ser abandonado.

(*) En dicha imposibilidad de establecer una aplicación que sea a la vez contínua y biyectiva entre variedades de distinta dimensión radica la "conciliación" entre la teoría de la cardinalidad de Cantor y la teoría de la dimensión de Riemann.

La Teoría Ergódica fue replanteada en su origen y formulada en lenguaje de teoría de la medida por Birkhoff y von Neumann. Así se dio origen a la forma moderna de los teoremas ergódicos de Birkhoff (1931), von Neumann (1932) y Hopf (1932), que difieren entre sí por el tipo de convergencia [8]. La solución del problema ergódico, en el sentido de igualdad de promedios temporales sobre trayectorias de Σ_E y promedios estadísticos sobre colectividades que pueden caracterizarse mediante una función densidad de probabilidad uniforme sobre Σ_E (teorema de equipartición), se redujo, como veremos más adelante, a probar que la hipersuperficie Σ_E tuviera la llamada propiedad de transitividad métrica. Pero ocurre que tal propiedad es de difícil detección en los sistemas reales y más bien aparece como una hipótesis relativa a la naturaleza del sistema. Hay que insistir, de todos modos, en que tales teoremas abrieron un nuevo campo de investigación, siendo el origen de numerosas publicaciones que estudian la transitividad métrica de hipersuperficies.

La dificultad de demostrar la transitividad métrica en sistemas reales ha hecho de la teoría ergódica de Birkhoff un instrumento de escasa utilidad para la tarea de fundamentar la M. E.. Pero ésta, por su naturaleza, se ocupa de estudiar sistemas macroscópicos y así Khinchin [4] ha investigado la posibilidad de evitar las dificultades prácticas que ofrece la aplicación a sistemas físicos de los teoremas ergódicos ordinarios, formulados independientemente de la dimensión del espacio de las fases, introduciendo como elemento fundamental el hecho de que el número de grados de libertad del sistema sea muy elevado. De esta forma obtiene, basándose en el Teorema del Límite Central un nuevo teorema ergódico, asintóticamente válido en el límite en que el número de grados de libertad del sistema tiende a infinito, y ello tan sólo para los promedios de determinadas funciones definidas sobre el espacio de fases. La ventaja de la teoría de Khinchin es que reemplaza la exigencia de transitividad métrica, a cambio de exigir otras propiedades que se dan de forma natural en los sistemas físicos, al propio tiempo que se limita a evaluar promedios para magnitudes físicas que son interesantes en Mecánica Estadística. Son restricciones más aparentes (matemáticas) que reales (físicas).

La Teoría Ergódica se puede desarrollar también partiendo de una descripción mecánico-cuántica microscópica. Lo que ocurre es que en teoría cuántica se encuentran dificultades adicionales debidas a las peculiaridades de los estados estacionarios. Se puede establecer un teorema ergódico cuántico análogo al de Birkhoff, en el que la condición de ausencia de degeneración en el espectro del hamiltoniano aparece como el equivalente cuántico de la hipótesis clásica de la transitividad métrica.

El equivalente cuántico del teorema clásico de Hopf es, sin embargo, el más útil para las aplicaciones prácticas. A este segundo teorema ergódico cuántico se llega introduciendo los llamados observables macroscópicos y suponiendo, además de la no degeneración del hamiltoniano, la ausencia de frecuencias de resonancia en su espectro.

Aunque von Neumann, al igual que Birkhoff, fue uno de los fundadores de la actual Teoría Ergódica, en el sentido de investigar problemas de dinámica general para sistemas dinámicos abstractos, ya había formulado con anterioridad el problema ergódico en Mecánica Estadística Cuántica, proporcionando una solución que durante algún tiempo fue aceptada como la definitiva [9]. En los años cincuenta su demostración fue criticada y sustituída por otras que, manteniendo la formulación básica, eliminan el concepto de observable macroscópico en el sentido de von Neumann.

También existen teoremas asintóticos, análogos a los clásicos de Khinchin, con validez en teoría cuántica. Son debidos fundamentalmente a Jancel [10]. En todos los casos se comprueba que la Teoría Ergódica Cuántica presenta dificultades adicionales a las que aparecen en Teoría Ergódica Clásica.

Recientemente ha habido un desarrollo importante, de naturaleza esencialmente matemática, sobre las propiedades ergódicas de sistemas dinámicos. Se basa en el concepto de sistema dinámico abstracto y en clasificaciones de tipos generales de sistemas dinámicos en base a ciertas propiedades asintóticas de su evolución temporal como "ergodicidad", "mixing" etc.. También se emplea la definición de entropía de una transformación que conserva la medida así como otros conceptos usados en teoría de la información [11]. Es esta línea de investigación, mantenida fundamentalmente por matemáticos de la "Escuela Rusa", la que ha permitido obtener resultados tan relevantes como la demostración de la ergodicidad del sistema de esferas duras, perfectamente elásticas, encerradas en un paralepípedo con paredes totalmente reflectantes.[2]

CAPITULO I. TEOREMA DE BIRKHOFF Y TRANSITIVIDAD METRICA

1. TEOREMA DE BIRKHOFF

Dado el carácter de este trabajo, que pretende ser una introducción a los intentos de fundamentación de la Mecánica Estadística mediante la Teoría Ergódica, preferimos dar una demostración en la que se trabaja directamente con funciones de fase, espacio de fases y demás conceptos mecánico-estadísticos [12], en lugar de fundamentarla en espacios y automorfismos abstractos [13].

Hipótesis: 1) Bajo la evolución temporal V es una parte invariante del espacio de las fases Γ ; es decir: toda trayectoria que pasa por un punto de V está contenida en V.

2) $f(P)$ es una función definida en V e integrable en el sentido de Lebesgue.

3) La medida de Lebesgue $\mu(V)$ del conjunto V es finita. (El teorema de Liouville garantiza, además, la invariancia de dicha medida bajo la evolución temporal [12].)

Tesis: El límite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt$$

existe para todo $P_o \in V$, excepto para, como máximo, unos ciertos puntos que constituyen un conjunto de medida nula; abreviadamente diremos que el límite existe casi por doquier en V (c.p.d. en V). P_t indica el punto al que la evolución temporal transporta al P_o al cabo de un tiempo t. El valor del límite resulta independiente del instante que tomemos como inicial dentro de la trayectoria.

Demostración: La demostración del teorema de Birkhoff consta de tres partes bien diferenciadas:

a) Introducción de una escala temporal discreta y existencia del límite temporal c.p.d. en V : con la notación

$$F(P_o;t_o;T) \equiv \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt$$

$$F_n(P_o;t_o) \equiv F(P_o;t_o;n\tau)$$

siendo n entero y τ un intérvalo temporal elemental, se trata de demostrar, en primer lugar, que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} F_n(P_o;t_o) \qquad \text{c.p.d. en V}$$

La demostración se hace por reducción al absurdo. En efecto, sea M el conjunto de puntos $P_o \in V$ para los cuales dicho límite no existe. Como la función f es integrable, en todo $P_o \in M$ la serie $F_n(P_o;t_o)$ tendrá un límite superior $\overline{F}(P_o)$ y otro límite inferior $\underline{F}(P_o)$ distintos, ambos finitos casi por doquier en M en virtud de las hipótesis 1) y 2). Y aquí es donde realmente radica la base de la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que M es de medida no nula. Consideremos una sucesión de intérvalos de la recta real (α_i, β_i) escogidos de tal manera que para todo $P_o \in M$ exista un índice i tal que

$$\underline{F}\,(P_o) < \alpha_i < \beta_i < \overline{F}\,(P_o)$$

Sea $M_i \equiv \{ P_o \in M \;/\; \underline{F}\,(P_o) < \alpha_i < \beta_i < \overline{F}\,(P_o) \}$

y M_∞ el conjunto de los puntos de M para los que alguno de los límites superior o inferior son infinitos. Tendremos entonces que

$$M = (\bigcup_j M_j) \cup M_\infty$$

Como $\mu(M) > 0$ y $\mu(M_\infty) = 0$, existirá algún j tal que $\mu(M_j) > 0$. Designamos tal M_j por M' y el correspondiente intérvalo (α_j, β_j) por (α, β), de forma que para todo $P_o \in M'$ se verifica

$$\underline{F}\,(P_o) < \alpha < \beta < \overline{F}\,(P_o) \qquad (I.1)$$

Con la notación

$$f_k\,(P_o) \equiv \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(P_t)\,dt \qquad (I.2)$$

siendo $t_k \equiv t_o + k\,\tau$, resulta

$$F_n\,(P_o;t_o) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k\,(P_o)$$

como expresión del promedio temporal de f(P) en el intérvalo (t_o, t_k). Sea M_o cualquier subconjunto medible de M' y M_k el conjunto en el cual se transforma M_o en virtud del movimiento natural en el intérvalo (t_o, t_k). Por el teorema de Liouville

$$\mu\,(M_k) = \mu\,(M_o)$$

La definición (I,2) permite escribir

$$f_k\,(P_o) = f_o\,(P_k)$$

sin más que trasladar la escala de tiempos en $k\tau$, por lo que

$$\int_{M_o} f_k\,(P_o)\,d\mu = \int_{M_k} f_o(P_k)\,d\mu$$

para todo $M_o \subset M'$.

Para un β dado, sea M_s el conjunto de los puntos de M' para los que la desigualdad $F_n(P_o;t_o) > \beta$ es válida, al menos, para un valor $n \le s$. Por ejemplo, para $s = 4$ lo integran los puntos de M' que cumplan al menos una de estas desigualdades: $F_1(P_o,t_o) > \beta; F_2(P_o;t_o) > \beta; F_3(P_o,t_o) > \beta; F_4(P_o;t_o) > \beta$. Como al crecer s el nuevo conjunto contiene al antiguo, resulta

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M'$$

De la definición de M_s se sigue

$$\lim_{s \to \infty} M_s = M'$$

y, por tanto

$$\lim_{s \to \infty} \mu(M_s) = \mu(\lim_{s \to \infty} M_s) = \mu(M')$$

Definiendo M_{j_o} como el conjunto de los puntos de M' que cumplen

$$\left.\begin{array}{l} F_j(P_o;t_o) > \beta \\ F_l(P_o;t_o) \le \beta \end{array}\right\} \quad \text{para} \quad 0 < l < j$$

y llamando M_{j_k} a su transformado por la evolución temporal de t_o a $t_o + \tau k$, se puede comprobar que [14] (*)

$$M_s = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=o}^{j-1} M_{j_k}$$

Integrando la primera desigualdad sobre el conjunto M_{j_o} resulta

$$\int_{M_{j_o}} F_j(P_o;t_o)\, d\mu > \beta \int_{M_{j_o}} d\mu = \beta\, \mu(M_{j_o})$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{1}{j} \sum_{k=o}^{j-1} \int_{M_{j_o}} f_k(P_o)\, d\mu = \frac{1}{j} \sum_{k=o}^{j-1} \int_{M_{j_k}} f_o(P_k)\, d\mu > \beta\, \mu(M_{j_o})$$

La última desigualdad conduce a

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=o}^{j-1} \int_{M_{j_k}} f_o(P_k)\, d\mu > \beta \sum_{j=1}^{s} j\, \mu(M_{j_o})$$

que se puede escribir en forma más compacta así:

$$\int_{M_s} f_o(P_k)\, d\mu > \beta\, \mu(M_s)$$

(*) En nuestro ejemplo anterior $M_4 = M_{10} + M_{20} + M_{30} + M_{40} + M_{21} + M_{31} + M_{41} + M_{32} + M_{42} + M_{43}$. En particular M_{30} cumple $F_3 > \beta$ y $F_1 \le \beta$ $F_2 \le \beta$; M_{31} es el transformado del M_{30} por la evolución temporal al cabo del tiempo τ.

puesto que, en virtud del Teorema de Liouville, los j-conjuntos M_{j_0}, M_{j_1}, ... $M_{j_{j-1}}$ tienen la misma medida, obtenemos

$$\mu(M_s) = \mu\left(\sum_{j=1}^{s} \sum_{k=0}^{j-1} M_{j_k}\right) = \sum_{j=1}^{s} j\,\mu(M_{j_0})$$

Pasando al límite para $s \to \infty$, la última desigualdad se escribe

$$\int_{M'} f_o(P_k)\, d\mu > \beta\,\mu(M') \qquad (I.3)$$

A esta desigualdad se ha llegado partiendo de que, en M', se verifica $\bar{F}(P_o) > \beta$. Operando de modo similar, pero a partir de la primera desigualdad $\underline{F}(P_o) < \alpha$ de la fórmula (I.1), se obtendría

$$\int_{M'} f_o(P_k)\, d\mu < \alpha\,\mu(M') \qquad (I.4)$$

Las desigualdades (I.3) y (I.4) contradicen la relación $\alpha < \beta$ expresada en (I.1). Razonando por reducción al absurdo la hipótesis $\mu(M) > 0$ es falsa. De este modo llegamos al resultado de que el conjunto M para el que el límite

$$\lim_{n \to \infty} F_n(P_o; t_o)$$

no existe, es un conjunto de medida nula. Dicho de otra manera: tal límite existe casi por doquier en V.

b) Eliminación de la condición de escala discreta para t:

Escojamos ahora n como el mayor entero contenido en T / τ. Se verifica entonces que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{n\,\tau}{T} = 1$$

La existencia del límite, probada en la primera parte de la demostración, garantiza la existencia de

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+n\tau} f(P_t)\, dt$$

En efecto, calculemos la diferencia, en valor absoluto, entre el límite que nos interesa y el anterior:

$$\lim_{T\to \infty} \left| \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt - \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+n\tau} f(P_t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \int_{t_o+n\tau}^{t_o+T} f(P_t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o+n\tau}^{t_o+T} |f(P_t)|\, dt \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\tau} \int_{t_o+n\tau}^{t_o+n\tau+\tau} |f(P_t)|\, dt = 0$$

Luego el promedio temporal que interesa

$$< f >_\tau \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt \qquad (I.5)$$

existe c. p. d. en V

c) Independencia del instante inicial :

Calculemos la diferencia

$$D \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt - \int_{t'_o}^{t'_o+T} f(P_t)\, dt \right\}$$

Para t_o y t'_o instantes arbitrarios,pero fijos,se tendrá siempre

$$\lim_{T\to\infty} \frac{t'_o - t_o}{T} = 0$$

y se verificará

$$D = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt - \int_{t'_o}^{t'_o+T} f(P_t)dt + \int_{t_o}^{t'_o} f(P_t)dt \right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt - \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t'_o+T} f(P_t)\, dt \right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt - \frac{1}{T-(t'_o-t_o)} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt \right\} =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left| \frac{t_o - t'_o}{T(T-t'_o+t_o)} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt \right| =$$

$$= \left(\lim_{T \to \infty} \frac{t_o-t'_o}{T-(t'_o-t_o)} \right) \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt \right) = 0$$

Luego el límite $< f >_T$ sólo depende de la trayectoria considerada, no de la posición del punto P_o dentro de la misma.

Se puede resumir el contenido físico del teorema de Birkhoff mediante las siguientes afirmaciones sobre el promedio temporal de cualquier función definida sobre el espacio de las fases del sistema, evaluado sobre la porción de trayectoria correspondiente al intérvalo $[t_o , \infty)$:

a) Dicho promedio existe para casi todas las trayectorias. Asimilando medidas de conjuntos a probabilidades de realización de los respectivos macroestados resultará que, al escoger al azar una trayectoria mediante su C. I. P_o , tal promedio estará bien definido con probabilidad uno.

b) Para cada trayectoria el promedio es independiente de la C. I. escogida. Ello resulta, como hemos visto, de la contribución nula al promedio de la porción de la trayectoria correspondiente a todo intérvalo finito (t_o, t'_o). Dicho de otra forma: toda evolución finita no contribuye al promedio. Parece difícil, pues, asignar al teorema de Birkhoff implicaciones en cuanto al problema de la irreversibilidad y la tendencia al equilibrio.

2. COROLARIO DEL TEOREMA DE BIRKHOFF : TRANSITIVIDAD METRICA.

Transitividad o indescomponibilidad métrica es la propiedad consistente en que un conjunto V , invariante y de medida finita en el espacio de las fases, no pueda dividirse en dos subconjuntos V_1 y V_2 invariantes y de medida no nula en el espacio de las fases. En las aplicaciones físicas V es un conjunto de trayectorias completas. Por tanto, si goza de la propiedad de transitividad métrica, tiene que darse una de estas tres posibilidades:

a) No se pueden separar esas trayectorias en dos conjuntos de trayectorias completas.

b) Se pueden separar, pero un conjunto tiene la medida de V y medida nula el otro.

c) Se pueden separar pero los conjuntos no son medibles.

Resulta que cuando V ,el conjunto en el que suponemos se verifica el teorema de Birkhoff,es métricamente indescomponible,el teorema de Birkhoff presenta un corolario,a veces llamado por los físicos "teorema ergódico", de sumo interés,pues asegura la igualdad entre el promedio temporal sobre casi todas las trayectorias y el promedio sobre el conjunto V.

En otras palabras,vamos a ver que la condición necesaria y suficiente para que el promedio temporal no dependa de la fase inicial P_0,salvo para puntos de un conjunto de medida nula,es que,además de las hipótesis del teorema de Birkhoff,V sea métricamente indescomponible. Veamos la demostración:

a) Condición necesaria: Si V no fuera métricamente transitivo existiría una cierta descomposición $V = V_1 + V_2$ con V_1 y V_2 invariantes y de medida positiva (no nula). Consideremos la función característica de V_1 , χ_{V_1} , como función de fase definida así:

$$\chi_{V_1} = \begin{cases} 1 \text{ para los puntos de } V_1 \\ 0 \text{ para los puntos restantes} \end{cases}$$

Es evidente que

$$< \chi_{V_1} >_T = 1 \quad \text{para las trayectoria que están en } V_1 .$$

$$< \chi_{V_1} > = 0 \quad \text{para las trayectorias que están en } V_2 .$$

Luego,si V no es métricamente transitivo,existe al menos una función integrable para la que el promedio temporal a lo largo de una trayectoria depende de la fase inicial P_0 y,por tanto,de la trayectoria.

b) Condición suficiente: Se trata de demostrar,supuesta la transitividad métrica de V ,que el promedio temporal,cuya existencia c. p. d. está asegurada por el teorema de Birkhoff,no depende de la fase inicial P_0,salvo para los puntos de un conjunto de medida nula. Supongamos que el promedio temporal de $f(P)$,integrable en V , no es constante c.p.d. en V. Existirá por tanto,un número real α tal que

$$< f(P) >_T \; > \alpha \quad \text{para todo punto de un cierto } V_1 \text{ tal que } \mu(V_1) > 0.$$

$$< f(P) >_T \; \leq \alpha \quad \text{para todo punto de un cierto } V_2 \text{ tal que } \mu(V_2) > 0.$$

Si a V_2 le añadimos el conjunto de puntos de medida nula para los que el promedio temporal de $f(P)$ no existe, tendremos un conjunto para el cual no se verifica $< f(P) >_T \; > \alpha$; sería , invariante, de medida positiva y complementario del V_1, contra la hipótesis.

Para deducir la igualdad entre $< f(P) >_T$ y $< f(P) >_{\mathfrak{J}}$,que es el resultado interesante desde el punto de vista físico,comenzaremos definiendo el promedio sobre la parte invariante V del espacio de las fases Γ,de la función $F(P_o;t_o;T)$

$$< F(P_o;t_o;T) >_{\mathfrak{J}} = \frac{1}{\mu(V)} \int_V d\mu \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t)\, dt \right\}$$

Por aplicación del teorema de Fubini

$$< F(P_o;t_o;T) >_{\mathfrak{J}} = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} dt \left\{ \frac{1}{\mu(V)} \int_V f(P_t)\, d\mu \right\} =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} dt \left\{ \frac{1}{\mu(V)} \int_V f(P_o)\, d\mu \right\} = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} < f >_{\mathfrak{J}} dt =$$

$$= < f >_{\mathfrak{J}} \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} dt = < f >_{\mathfrak{J}} \qquad (I.6)$$

donde se ha tenido en cuenta que tanto P_o como P_t son variables de integración sobre el volumen invariante V.

Dicho de otra forma: Los promedios temporales,promediados a su vez en el espacio de las fases,coinciden con los promedios en el espacio de las fases de la función original para un instante fijo (el inicial,por ejemplo).

Por otra parte,del teorema de Birkhoff y de la hipótesis de transitividad métrica,se sigue que

$$< < f >_T >_{\mathfrak{J}} = < f >_T \quad \text{,casi por doquier en } V \qquad (I.7)$$

Restando (I.7) de (I.6) se obtiene

$$< < f >_T - F(P_o;t_o;T) >_{\mathfrak{J}} = < f >_T - < f >_{\mathfrak{J}} \qquad (I.8)$$

La igualdad entre el promedio temporal que aparece en el teorema de Birkhoff y el promedio sobre la parte invariante del espacio de las fases quedará demostrada si se prueba que el miembro de la izquierda es nulo. Conviene resaltar el hecho de que en (I.8) las dependencias en T son aparentes.

Demostremos finalmente que el primer miembro de (I.8) es nulo. Sea δ un número positivo arbitrario y V_1 el conjunto de puntos $P_o \in V$ para los cuales

$$| < f >_\tau - F(P_o;t_o;T) | < \delta$$

y sea V_2 tal que $V_1 \cup V_2 = V$.
Se verifica:

$$| \int_V \{ < f >_\tau - F(P_o;t_o;T) \} \, d\mu \leq$$

$$\int_{V_1} | < f >_\tau - F(P_o;t_o;T) | \, d\mu + \int_{V_2} | < f >_\tau - F(P_o;t_o;T) | \, d\mu \leq$$

$$\leq \delta \ \mu(V_1) + \int_{V_2} | < f >_\tau | \, d\mu + \int_{V_2} | F(P_o;t_o;T) | \, d\mu =$$

$$= \delta \ \mu(V_1) + | < f >_\tau | \ \mu(V_2) + \int_{V_2} | F(P_o;t_o;T) | \, d\mu \qquad (I.9)$$

Por el teorema de Birkhoff

$$\lim_{T \to \infty} F(P_o;t_o;T) = < f >_\tau \quad \text{casi por doquier en } V.$$

Luego

$$\lim_{T \to \infty} \mu(V_2) = 0$$

o lo que es lo mismo, para T suficientemente grande $\mu(V_2) < \delta$.
Estudiemos ahora el último sumando de (I.9):

$$\int_{V_2} | F(P_o;t_o;T) | \, d\mu = \int_{V_2} d\mu \, \left| \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} f(P_t) \, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_{V_2} d\mu \int_{t_o}^{t_o+T} | f(P_t)| \, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} dt \int_{V_2} | f(P_t) | \, d\mu =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} dt \int_{V_2(t)} | f(P_o)| \, d\mu$$

Por el teorema de Liouville

$$\mu(V_2(t)) = \mu(V_2)$$

con lo que

$$\lim_{T \to \infty} \mu(V_2(t)) = 0$$

Luego, para grandes valores de T

$$\int_{V_2} | F(P_o;t_o;T) | \, d\mu < \delta$$

El primer miembro de (I.8) queda finalmente

$$\left| \int_V d\mu \cdot \{ < f >_T - F(P_o;t_o;T) \} \right| \leq$$

$$\leq \delta \, \mu(V_1) + < f >_T \delta + \delta$$

Como δ es arbitrario resulta que

$$\int_V \{ < f >_T - F(P_o;t_o;T) \} \, d\mu = 0$$

o sea

$$< < f >_T - F(P_o;t_o;T) >_{\mathfrak{J}} = 0$$

y comparando con (I.8) se llega a

$$< f >_T = < f >_{\mathfrak{J}} \quad \text{casi por doquier en } V. \qquad (I.10)$$

La igualdad (I.10), o corolario del teorema de Birkhoff si hay transitividad métrica, es lo que frecuentemente en Física se llama "Teorema Ergódico". El problema físico se centra entonces en el estudio de la propiedad de transitividad métrica en los sistemas físicos. Aquellos en los que se da la citada propiedad se dice que son ergódicos. Es lo mismo que decir que el corolario del teorema de Birkhoff es válido para ellos.

3. TRANSITIVIDAD METRICA Y CONSTANTES DE MOVIMIENTO.

Una función $f(T_tP_o;t)$ es integral de movimiento cuando, no siendo constante en todo el espacio de fases, permanece constante a lo largo de la trayectoria $P_t = T_tP_o$. Una integral de movimiento sin dependencia explícita en t se llama constante de movimiento.

Un sistema con n grados de libertad queda descrito mediante $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden y no puede poseer más de $2n$ integrales de movimiento independientes. Precisamente una forma de escribir la ecuación de la trayectoria es dar $2n$ integrales independientes igualadas a una constante y considerar t como parámetro.

En general, tales integrales de movimiento tienen carácter local. Es decir, están definidas sólo para una región de Γ y un intérvalo temporal. Por ejemplo, frente a traslaciones uniformes el momento lineal es una constante de movimiento; pero si el sistema está encerrado en un recipiente, las colisiones de las partículas con las paredes se traducen en singularidades, correspondientes al cambio en el momento lineal causado por la colisión.

Se llaman globales aquellas integrales de movimiento que mantienen su valor constante en todo tiempo. Estas integrales de movimiento globales, muy inferiores en número a $2n$ para los sistemas físicos objeto de un estudio mecánico-estadístico, son las que restringen el dominio del espacio de las fases en el que necesariamente estará contenida la trayectoria y las únicas relevantes, por tanto, en ergodicidad.

Para que la hipersuperficie de energía constante Σ_E, que es el conjunto invariante V en las aplicaciones a la M. E., sea métricamente transitiva, es condición necesaria la no existencia de ninguna otra constante de movimiento distinta de la energía. Nos referimos a constantes en lugar de a integrales de movimiento por limitarse este estudio a sistemas con Hamiltoniano sin dependencia temporal explícita. En efecto : sea $g(P)$ una constante de movimiento distinta de la energía e independiente de ella. Se podrá encontrar un cierto número α tal que

$g(P) > \alpha$ define un V_1 de medida positiva.

$g(P) \leq \alpha$ define un V_2 de medida positiva.

Además V_1 y V_2 son invariantes, por definición, y $V = V_1 \cup V_2$, con lo que no habría transitividad métrica.

A propósito de la relación entre transitividad métrica y constantes de movimiento conviene indicar que no se ha demostrado que la no existencia de otras distintas de la energía sea condición suficiente para la indescomponibilidad métrica.

Asimismo, no existe un procedimiento general para determinar ni el número ni el carácter de las constantes de movimiento de un sistema físico dado que no implique la resolución de sus ecuaciones de movimiento. No obstante la energía lo es para un sistema aislado. Veremos, más adelante, que es conveniente considerar que el sistema físico ocupa un volumen finito en el espacio de las fases. Por ello, y aunque el sistema esté integrado por partículas libres, al tener en cuenta el efecto de las paredes del recipiente no podremos considerar como constantes de movimiento ni el momento lineal ni el angular. Pero nada se puede anticipar "a priori" sobre la existencia de otras constantes de movimiento que implicarían la descomponibilidad métrica de la hipersuperficie Σ_E del sistema.

Por sencillez, pero sin rigor, se procede como si la energía fuera la única integral de movimiento global en aquellos casos en que no tenemos conocimiento de ninguna otra. Los resultados deben justificarse "a posteriori". En cambio, si conocemos otras integrales globales distintas de E, la no transitividad métrica de Σ_E está asegurada y estamos obligados a promediar sobre la hipersuperficie de Γ que tenga en cuenta los valores de todas y cada una de ellas. De esta extensión a sistemas con varias constantes de movimiento se ocupa el teorema de Lewis, al que nos referiremos en el Capítulo II.

CAPITULO II. OTROS TEOREMAS ERGODICOS.

1. TEOREMA DE LEWIS.

Como el de Birkhoff se trata de un teorema abstracto en teoría de integración referente a una transformación que conserva la medida en un espacio invariante [15]. Nosotros supondremos que éste es el espacio de las fases, dotado de la medida de Lebesgue, cuya invariancia en la evolución temporal está garantizada por la ecuación de Liouville.

Sea $y_i(P)$ una constante de movimiento, por supuesto global. Si la dimensión del espacio de las fases es $2n$, el número de tales constantes de movimiento independientes y_i que pueden encontrarse será $2n-1$ como máximo.(*) Supongamos que hay k de éstas. La constante "vectorial" del movimiento

$$Y(P) \equiv \{ y_1(P) ; y_2(P) ; \dots ; y_k(P) \}$$

se dice es un invariante completo del sistema, y tiene la propiedad de que toda función medible que sea constante de movimiento es, casi por doquier en V, parte invariante del espacio de las fases, funcionalmente dependiente del invariante completo.

Por el teorema de Birkhoff $< f >_T$ es una constante de movimiento; por tanto es funcionalmente dependiente de $Y(P)$ y podemos definir:

$$F[Y(P)] \equiv < f >_T \quad \text{casi por doquier en } V. \qquad \text{(II.1)}$$

Supuesto conocido el invariante completo, el problema de calcular promedios temporales es equivalente al de determinar F.

A cada $P \in V \subset \Gamma$ le asociamos, mediante el invariante completo, un punto de R^k. Sea Y^{-1} la correspondencia inversa. Designamos por $Y^{-1}(X)$ el conjunto de puntos del espacio V para los que el invariante completo toma valores dentro del conjunto $X \subset R^k$. Como $Y(P)$ lo forman funciones invariantes $Y^{-1}(X)$ es invariante, salvo un conjunto de medida nula al que llamaremos Z. De otro modo: $Y^{-1}(X) - Z$ es un conjunto invariante en V y $\mu(Z) = 0$.

El teorema de Birkhoff se puede aplicar al conjunto invariante $Y^{-1}(X)-Z$ y da

$$\int_{Y^{-1}(X)-Z} < f >_T \, d\mu = \int_{Y^{-1}(X)-Z} f(P) \, d\mu$$

(*) que se podrían obtener eliminando el tiempo en las 2n integrales de movimiento posibles.

sin más que cambiar el orden de integración en el primer miembro. Por supuesto que μ se refiere a la medida en V . La aditividad de la misma permite escribir la relación anterior así:

$$\int_{Y^{-1}(X)} \langle f \rangle_T \, d\mu = \int_{Y^{-1}(X)} f(P) \, d\mu$$

que equivale a

$$\int_{Y^{-1}(X)} F[Y(P)] \, d\mu = \int_{Y^{-1}(X)} f(P) \, d\mu \qquad \text{(II.2)}$$

Es conveniente escribir de otra forma más lógica el miembro de la izquierda, puesto que F actúa sobre puntos de R^k y en cambio la integral se realiza en V. Para ello definimos como medida inducida por μ a la m tal que

$$m(X) = \mu[Y^{-1}(X)]$$

con lo que (II.2) se escribe

$$\int_X F[Y] \, dm = \int_{Y^{-1}(X)} f(P) \, d\mu \qquad \text{(II.3)}$$

El problema ahora es calcular F ,para lo cual habrá que diferenciar en el sentido abstracto. Para un P dado, sea A el conjunto de los valores $a_i = y_i(P)$ que toma el invariante completo en P . Se trata, por tanto, de derivar la expresión (II.3) en el punto $Y = A = (a_1, \ldots, a_k)$. La generalización de la definición usual de derivada permite escribir

$$F(A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{I_\delta(A)} F(Y) \, dm}{m[\, I_\delta(A) \,]}$$

donde $I_\delta(A)$ es el conjunto de puntos "próximos" a A en el sentido de que sus coordenadas y_i están relacionadas con las componentes del invariante completo por

$$|\, y_i - a_i \,| \leq \delta$$

La expresión (II.3) permite escribir F(A) en función de integrales en V :

$$F(A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{Y^{-1}[I_\delta(A)]} f(P)\, d\mu}{\mu[Y^{-1}(I_\delta(A))]} \qquad (II.4)$$

Así, la función F queda completamente determinada y permite calcular los promedios temporales : a una trayectoria dada le corresponde un cierto punto $A \in R^k$ y como $f(P)$ es un dato, el promedio temporal se calcula integrando en $Y^{-1}(I_\delta(A))$. De esta forma se elimina la dificultad de la no existencia de transitividad en V ; para ello se promedia no en todo el espacio invariante sino en una zona restringida de él, asimismo invariante y ya métricamente indescomponible al estar determinada por el invariante completo. Por supuesto se necesita que las superficies $Y(P)$ = cte. sean lo suficientemente "suaves" como para permitir el uso de métodos analíticos. En particular, si la energía formase un invariante completo, la fórmula (II.4) obliga a trabajar en una pequeña envoltura alrededor de la hipersuperficie de energía constante Σ_E. Estos promedios en torno a hipersuperficies determinadas por el invariante completo son los que Truesdell [16] llama promedios pantamicrocanónicos.

2. TEOREMA DE VON NEUMANN

Pasa por ser el primer teorema ergódico, pues aunque Birkhoff publicó un año antes el que lleva su nombre conocía previamente el de von Neumann [9]. El teorema de Birkhoff se conoce a veces con el nombre de teorema ergódico individual y el de von Neumann con el de teorema ergódico "en media".

Para demostrar el teorema de von Neumann se asocia un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a las funciones de cuadrado sumable definidas en V, siendo $\mu(V)$ finita e invariante. El producto escalar de $f(P) \in \mathcal{L}_2(V)$ y $g(P) \in \mathcal{L}_2(V)$ es, por definición

$$(f, g) = \int_V f(P)\, g(P)\, d\mu$$

La evolución temporal implica un grupo uniparamétrico T_t de transformaciones analíticas de V en sí mismo, que induce otro grupo de transformaciones U_t en el espacio $\mathcal{H}$. Así resulta:

$$U_t\, f(P) = f(T_t\, P) = f(P_t)$$

Este grupo es unitario, como se puede comprobar fácilmente por ser U_t una transformación invertible [17]. Utilizando la resolución espectral de U_t se puede demostrar que, para toda $f(P) \in \mathcal{H}$, existe otra función de $\mathcal{H}$, que designaremos por $< f >_T$, tal que

$$\lim_{T \to \infty} \left\| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} U_t\, f(P)\, dt \; - \; < f >_T \right\| = 0 \qquad (II.5)$$

donde la norma $\| f \|$ de una función se define como $(f , f)^{\frac{1}{2}}$. Se demuestra además que $< f >_T$ es invariante en el sentido de que

$$U_t < f >_T = < f >_T$$

Este teorema, en gran medida análogo al de Birkhoff, resulta más débil que este último al ser de convergencia en media cuadrática en lugar de puntual.

Si al propio tiempo tenemos que $f(P) \in \mathcal{L}_2(V)$ y $f(P) \in \mathcal{L}_1(V)$ se puede demostrar que las dos funciones límites $< f >_T$ (las definidas casi por doquier por los teoremas de von Neumann y Birkhoff) son iguales c.p.d. en V. Para la independencia de $< f >_T$ respecto a P es de nuevo condición necesaria y suficiente la transitividad métrica de V. Por tanto, y en el contexto de la Mecánica Estadística Clásica, el interés del citado teorema es mínimo.

3. TEOREMA DE HOPF.

Es una generalización del teorema de von Neumann que se presta a una primera introducción del concepto de "mixing", más general que el de ergodicidad y de gran interés en los tratamientos modernos de este tipo de problemas.

En dicho teorema no se trata de relacionar promedios temporales con promedios en el espacio de las fases, sino que se demuestra que a partir de una distribución inicial $g_0(P)$ en el espacio V la evolución del sistema es tal que $U_t\, g_0(P) = g(P)$ tiende hacia un valor estacionario y uniforme g^*. El valor medio de una cierta función $f(P)$ viene dado por el producto escalar usual (f , g).

El teorema de Hopf establece que

$$\lim_{T \to \infty} \int_{t_o}^{t_o+T} | (f , U_t g) - (f , g^*) |^2 \, dt = 0 \tag{II.6}$$

lo que indica que el promedio temporal de las fluctuaciones estadísticas en torno a sus valores límites tiende a cero cuando T crece indefinidamente.

La relación (II.6) no expresa exactamente una convergencia en media, como puede observarse comparándola con (II.5). La condición necesaria y suficiente para que se verifique el teorema de Hopf es, aparte las ya mencionadas, la de que exista transitividad métrica en el espacio $V \times V$, producto cartesiano de V por sí mismo. Por supuesto que la medida invariante en V induce otra medida invariante en $V \times V$ y es en función de ésta última como hay que definir la indescomponibilidad métrica del espacio producto.

Si llamamos sistema "mixing" a aquel en que es válido el teorema de Hopf y sistema ergódico a aquel en que se cumple el teorema de Birkhoff y su corolario, resulta que todo sistema "mixing" es ergódico, puesto que la transitividad métrica en V es condición necesaria para la transitividad métrica en $V \times V$. De ahí que una forma de probar la ergodicidad de un sistema sea demostrar que se trata de un "mixing", lo cual puede resultar en algunos casos más sencillo. En el capítulo VI se matizará el concepto de "mixing", que se puede presentar en dos formas diferentes: la fuerte y la débil; esta última es propiamente a la que se refiere el teorema de Hopf.

CAPITULO III. ADAPTABILIDAD DE LOS TEOREMAS ERGODICOS A SISTEMAS FISICOS

1. HIPOTESIS CUASI-ERGODICA Y TRANSITIVIDAD METRICA.

Como ya se indicó en la Introducción, tanto la primitiva hipótesis ergódica como la hipótesis cuasi-ergódica no constituyen una base sobre la que se pueda demostrar la requerida equivalencia entre promedios temporales y de fase. La Teoría Ergódica, que propiamente comienza con el trabajo de Birkhoff ya citado, presenta el problema de modo distinto: un sistema se llamará ergódico cuando le sea aplicable el teorema de Birkhoff, con corolario incluído. La condición necesaria y suficiente es la hipótesis de transitividad métrica, que reemplaza así a la primitiva hipótesis ergódica y a la cuasi-ergódica.

Por su interés físico conviene resaltar aquí la distinción entre las hipótesis cuasi-ergódica y de transitividad métrica. En lenguaje matemático, la primera exige que la trayectoria sea densa en el conjunto de puntos accesibles en el espacio de las fases. En cambio, la segunda impide la existencia de conjuntos de medida no nula, invariantes, por los que no pase una trayectoria cualquiera. Y el que la trayectoria sea densa no presupone nada sobre su posible penetración en todo conjunto de medida positiva (*). Dicho de otra forma: aunque la trayectoria sea densa no pasa, en general, por todo conjunto de medida positiva, puesto que el complementario de la trayectoria es de medida positiva y no contiene puntos de ella. Son, por tanto, dos conceptos independientes: la trayectoria puede ser densa y ello no implicar nada sobre la existencia de transitividad métrica. En Teoría Ergódica se utilizan conceptos de teoría de la medida (transitividad) y no meros conceptos topológicos (cuasi-ergodicidad).

(*) El hecho de que un conjunto sea denso no prefija nada sobre su medida. Así, en un intervalo de la recta real los racionales y los irracionales son densos y uno tiene medida cero y el otro la del intervalo.

Tampoco la no numerabilidad implica medida positiva ya que el conjunto de expresiones decimales infinitas, obtenidas mediante la exclusión de una cifra del sistema de numeración empleado, es un conjunto no numerable pero de medida nula: (Cantor's Ternary Set, [18]).

2. MEDIDA EN LA HIPERSUPERFICIE Σ_E .

Los teoremas ergódicos son válidos en teoría abstracta de integración, aunque nosotros los utilizamos solamente en el contexto de la Mecánica Estadística. De esta forma el conjunto más amplio de puntos ha sido introducido como la parte invariante V del espacio de las fases Γ , la transformación puntual es la dada por la evolución temporal y la medida es la inducida en V por la de Lebesgue en Γ , que se conserva en virtud del teorema de Liouville.

El primer problema que se plantea es el de elegir la parte invariante y de medida finita V, en la cual se calculan los promedios, supuesta la integrabilidad de la función $f(P)$. La elección $V \equiv \Gamma$ no es apropiada porque, aunque seguiría siendo válido el teorema de Birkhoff (compruébese en la demostración), no lo serían ni el corolario, que es el resultado físico interesante, ni los teoremas de Lewis, von Neumann y Hopf. Se trata pues de determinar una parte invariante $V \subset \Gamma$, que sea de medida finita y, por supuesto, métricamente transitiva.

Es usual suponer que el sistema está aislado con lo cual la hipersuperficie Σ_E , definida por la igualdad energía = constante , puede jugar el papel del conjunto invariante V . Los promedios se calculan en la hipersuperficie Σ_E , con lo que en Teoría Ergódica juegan un papel relevante los promedios calculados en la colectividad microcanónica (*).

Una dificultad, que es preciso superar, consiste en que $\mu(\Sigma_E) = 0$ por ser Σ_E de dimensión $2n-1$ y estar definida μ en Γ , que es de dimensión $2n$. La solución de tomar la medida de Lebesgue en Σ_E , no en Γ , no es adecuada ya que tal medida no resulta ser invariante. En un lenguaje muy vulgar, pero intuitivo, el problema sería éste: "podemos medir m^3 en un espacio, y éstos son invariantes bajo una cierta evolución temporal. El número de m^3 de una superficie es cero y el número de m^2 en la misma no son invariantes. Se necesita definir una medida sobre la superficie que pondere las distintas partes de la misma de forma que porciones correspondientes por evolución temporal tengan la misma medida."

(*) De hecho, es en la demostración de la igualdad entre promedios microcanónicos y promedios temporales donde radica el valor de la Teoría Ergódica como instrumento de fundamentación de la M. E. del equilibrio, ya que los demás promedios estadísticos, canónico y macrocanónico, se fundamentan en el primero.

El problema de hallar tal medida invariante en Σ_E ha sido resuelto por Khinchin [19], en la hipótesis de que las superficies de energía constante sean suficientemente "suaves" como para permitir el empleo de métodos analíticos. Para ello consideremos la hipersuperficie Σ_E y otra próxima a ella $\Sigma_{E+\Delta E}$, que delimitan un conjunto de puntos $\Gamma_E \subset \Gamma$ de medida finita en el espacio de las fases. Sea M un subconjunto de Σ_E y Γ_M la parte de Γ_E que tiene a M como proyección ortogonal sobre Σ_E. Lamando μ a la medida de Lebesgue resultará:

$$\mu_{2n}(\Gamma_M) = \int_{\Gamma_M} d\mu_{2n}(\Gamma) = \int_{\Gamma_M} d\mu_{2n-1}(\Sigma_H)\ dn_H$$

con $E \leq H \leq E+\Delta E$ y $dn_H = \dfrac{dH}{|\text{grad } H|}$. Resulta así:

$$\mu_{2n}(\Gamma_M) = \int_{\Gamma_M} d\mu_{2n-1}(\Sigma_H) \frac{dH}{|\text{grad } H|} =$$

$$= \int_E^{E+\Delta E} dH \int_{\Sigma_H} \chi_{\Gamma_M} \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_H)}{|\text{grad } H|}$$

donde χ_{Γ_M} es la función característica del conjunto Γ_M (la que vale 1 para los puntos de Γ_M y cero para el resto).

El teorema de Liouville asegura la invariancia de $\mu_{2n}(\Gamma_M)$ y, por tanto, la invariancia de

$$\lim_{\Delta E \to 0} \frac{\mu_{2n}(\Gamma_M)}{\Delta E} = \lim_{\Delta E \to 0} \frac{1}{\Delta E} \int_E^{E+\Delta E} dH \int_{\Sigma_H} \chi_{M_H} \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_H)}{|\text{grad } H|} =$$

$$= \lim_{\Delta E \to 0} \frac{1}{\Delta E} \left[\int_0^{E+\Delta E} dH \int_{\Sigma_H} \chi_{M_H} \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_H)}{|\text{grad } H|} - \int_0^E dH \int_{\Sigma_H} \chi_{M_H} \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_H)}{|\text{grad } H|}\right] =$$

$$= \frac{d}{dE}\left[\int_0^E dH \int_{\Sigma_H} \chi_{M_H} \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_H)}{|\text{grad } H|}\right] =$$

$$= \int_{\Sigma_E} \chi_M \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_E)}{|\text{grad } H|_{H=E}} =$$

$$= \int_M \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_E)}{|\text{grad } H|_{H=E}}$$

Dicha integral es lo que definimos como medida de M en Σ_E que,por construcción,resulta inavariante. Así:

$$m(M) = \int_M dm(\Sigma_E) = \int_M \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_E)}{|\text{grad } H|_{H=E}} \qquad \text{(III.1)}$$

Se puede demostrar que esta definición es compatible con las prescripciones del teorema de Lewis para el caso en que la única constante de movimiento sea la energía. Los promedios en Σ_E se escriben así:

$$< f >_{\mathfrak{J}} = \frac{1}{m(\Sigma_E)} \int_{\Sigma_E} f(P) \frac{d\mu_{2n-1}(\Sigma_E)}{|\text{grad } H|_{H=E}}$$

Y este promedio es el que coincide con el temporal si la hipersuperficie de energía constante Σ_E es métricamente indescomponible.

Si hay más de una constante de movimiento el teorema de Lewis proporciona,junto con la generalización de la fórmula (III.1),el modo de calcular los promedios de fase correspondientes. El procedimiento representa esencialmente una reducción del espacio de fases accesible al sistema,acompañada de una redefinición de la medida con el objeto de conservar su invariancia bajo la evolución temporal.

3. FASES EXCEPCIONALES.

Supuesta la transitividad métrica,el corolario del teorema de Birkhoff asegura la igualdad entre los promedios temporales y los calculados en una hipersuperficie métricamente indescomponible en el espacio de las fases,para casi todas las trayectorias del sistema. El problema que se plantea es cómo garantizar la irrelevancia de esas trayectorias asociadas a fases excepcionales. En principio el sistema puede estar en un microestado excepcional y en este caso,aún existiendo transitividad métrica,no sería lícita la igualdad de promedios.

Para evitar esta dificultad se impone la condición de que el efecto de estas fases iniciales sea despreciable en los casos usuales, lo cual parece sugerir una relación entre medida y probabilidad. En concreto se supone que la distribución de probabilidad para que se den unas fases de un cierto subconjunto de Γ es función absolutamente contínua(*) de la medida de dicho recinto en la hipersuperficie de los puntos accesibles al sistema. Así resulta que la probabilidad de que el sistema se encuentre en una fase excepcional es nula por constituir todas las fases excepcionales un conjunto de medida nula. De esta forma a una teoría abstracta como es la Teoría Ergódica se la dota de un elemento estadístico, como es la relación probabilidad-medida que, elevada a la categoría de postulado, hace aplicable la teoría matemática a la Mecánica Estadística.

Otra forma de resaltar la no importancia de las fases excepcionales es pensar en la estructura de tipo "coarse-grained" que se usa en Mecánica Estadística, no sólo cuando se quiere pasar de una descripción dinámica del sistema a una descripción termodinámica, sino también en la descripción realista de cualquier proceso de medida. En lugar de promediar funciones de puntos se promedian funciones de "celdas", conjuntos formados por microestados indistinguibles entre sí por medio de medidas macroscópicas instantáneas. Esta descripción es más grosera que la microscópica completa ("fine-grained"), porque utiliza tan sólo un pequeño número de variables macroscópicas independientes. El valor que cada una de estas variables toma en una celda determinada representa un cierto promedio de los valores que dicha función tomaría en cada uno de los puntos de la misma; como la celda es de dimensión finita una integral, calculada en ella, no viene alterada por la influencia de conjuntos de puntos de medida nula, por lo cual, aunque haya puntos excepcionales, en los promedios tipo "coarse grained" no se manifiestan; dicho de otro modo: no hay celdas excepcionales.

(*) Una función de conjunto ρ es absolutamente contínua respecto a una función de medida m si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo M del dominio de ρ que verifique $m(M) < \delta$, se cumple $|\rho(M)| < \epsilon$. Se deduce que $\rho(M)=0$ si $m(M)=0$. La continuidad absoluta en variable real se puede entender como un caso particular de esta definición.

4. SOBRE LAS CONSTANTES DE MOVIMIENTO : TRANSITIVIDAD METRICA EXTENDIDA.

En los apartados anteriores hemos visto como los teoremas ergódicos ordinarios (Birkhoff, von Neumann, Hopf) ofrecen una justificación del cálculo de promedios en Mecánica Estadística, en la hipótesis de que la hipersuperficie Σ_E sea métricamente transitiva. Por otro lado, el teorema de Lewis, que no está sujeto a tal limitación, exige para su aplicación el conocimiento del invariante completo. Como la existencia de constantes de movimiento distintas de la energía rompe la transitividad métrica(*) se comprende, en cualquier caso, el importante papel que dichas magnitudes juegan en relación con la posible ergodicidad del sistema.

El problema de la determinación de todas las constantes de movimiento de un sistema dado aparece como fundamental. Por su relación con teorías ergódicas nos estamos refiriendo, una vez más, a constantes de movimiento globales y "aislantes" (que reduzcan efectivamente la dimensión de la parte accesible V del espacio de fases). Pero ni limitándonos a éstas sabemos de ningún trabajo que resuelva definitivamente el problema de cuántas y cuáles son las constantes de movimiento de un sistema físico dado.

Una aportación interesante, que suaviza la exigencia de transitividad métrica, es la restricción que Khinchin sugiere para la aplicación de los teoremas ergódicos. La idea consiste en aplicarlos solamente a funciones de fase que representen observables físicos. Y como diferentes puntos del espacio de las fases pueden corresponder al mismo estado físico, las funciones interesantes habrán de tomar los mismos valores en todos los puntos del espacio de las fases que representen el mismo estado. Estas funciones, llamadas "normales" por Khinchin [20], no presuponen un tratamiento "coarse-grained" puesto que siguen operando sobre puntos y no sobre celdas. Así, por ejemplo, las funciones periódicas en las coordenadas angulares serán las únicas aptas para representar observables físicos. Del mismo modo, si el sistema lo forman partículas indistinguibles, una función normal ha de tomar el mismo valor en un punto del espacio de las fases (fase específica) que en todos los que se obtengan a partir de él permutando sus coordenadas (fase genérica).

(*) Conviene insistir en el hecho de que la no existencia de constantes de movimiento no se ha demostrado que sea condición suficiente para garantizar la transitividad métrica. Así, por ejemplo, si se opera en la hipersuperficie Σ_E, no basta la no existencia de otras constantes de movimiento distintas de la energía para asegurar la indescomponibilidad métrica de la hipersuperficie de energía constante.

En Mecánica Estadística tiene interés el teorema ergódico aplicado a funciones normales. Al ser menos fuerte el teorema, la hipótesis se suaviza y adopta otra forma llamada "transitividad métrica extendida". Se dice que hay transitividad métrica extendida cuando o bien se da la ordinaria o bien ésta es violada por una descomposición tal que en cada parte existe cuando menos un punto representativo de todo estado físico. En resumen: el teorema de Birkhoff y su corolario se pueden aplicar a funciones normales siendo la condición necesaria y suficiente la existencia de transitividad métrica extendida.

Con objeto de aclarar el concepto de transitividad métrica extendida es típico presentar el siguiente ejemplo: sea un sistema con dos grados de libertad representando otros tantos movimientos uniformes de rotación que sean independientes. Utilizamos como coordenadas generalizadas las variables angulares θ_1 y θ_2, siendo p_1 y p_2 los momentos generalizados respectivos. Suponiendo que los momentos de inercia correspondientes son la unidad, el hamiltoniano del sistema será:

$$H = \tfrac{1}{2}\left(p_1^{\,2} + p_2^{\,2} \right)$$

Para este sistema las ecuaciones de Hamilton son

$$d\theta_1/dt = p_1 \qquad\qquad dp_1/dt = 0$$

$$d\theta_2/dt = p_2 \qquad\qquad dp_2/dt = 0$$

con lo que p_1 y p_2 resultan ser constantes de movimiento. Como aquí el espacio Γ es de cuatro dimensiones se puede tratar de buscar otra constante independiente de ellas. Por ejemplo: $\theta_1 p_2 - \theta_2 p_1$, cuya derivada con respecto al tiempo es cero y es independiente de las anteriores. Consideremos ahora dos puntos del espacio de las fases que representen el mismo estado físico: por ejemplo $P_1=(\theta_1;\theta_2;p_1;p_2)$ y $P_2=(\theta_1+2\pi;\theta_2+2\pi;p_1;p_2)$. Las constantes de movimiento p_1, p_2 y consecuentemente la energía, son funciones normales, mientras que la $\theta_1 p_2 - \theta_2 p_1$ no lo es, supuesto $p_1 \neq p_2$. Luego no puede haber transitividad métrica ordinaria porque hay constantes de movimiento distintas de E y, por haber entre éstas alguna normal, tampoco hay transitividad métrica extendida.

Siguiendo con el ejemplo la forma de conseguir ergodicidad sería calcular promedios, según el teorema de Lewis, en el subconjunto del espacio de las fases definido por

$$p_1 = \omega_1 = \text{cte.}$$

$$p_2 = \omega_2 = \text{cte.}$$

que es un plano paralelo al $\theta_1\,\theta_2$ y desde luego una parte de la hipersuperficie $\frac{1}{2}(p_1^{\,2}+p_2^{\,2}) = E = \text{cte}$. Falta ver si hay transitividad métrica extendida en este plano (desde luego tenemos transitividad métrica ordinaria si cortamos además por la superficie $\theta_1 p_2 - \theta_2 p_1 = \text{cte.}$, lo cual carece de sentido físico). La trayectoria es

$$\theta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}\,\theta_2 + \text{cte.}$$

Está constituída por segmentos en un cuadrado de lado 2π y la condición para que éstos sean conjuntos finitos o infinitos de segmentos distintos es que ω_1/ω_2 sea racional o irracional, respectivamente. En este último caso se puede demostrar que si el cuadrado se subdivide en dos partes invariantes, de forma que todos los puntos físicamente equivalentes están en la misma parte, una de ellas es de medida cero; es decir: el plano $\theta_1\,\theta_2$ es métricamente indescomponible, en el sentido extendido, se las frecuencias son inconmensurables. En este caso los promedios temporales de funciones normales son iguales a los promedios calculados en el plano definido por $p_1 = \omega_1$ $p_2 = \omega_2$, a pesar de la existencia de la constante de movimiento $\theta_1\,p_2 - \theta_2\,p_1$.

La aportación de Khinchin mejora el contenido físico y la aplicabilidad de la teoría ergódica ordinaria. Pero no resuelve definitivamente el problema puesto que subsiste la dificultad de investigar la transitividad de las hipersuperficies, o lo que es lo mismo, de encontrar las constantes de movimiento.

CAPITULO IV : TEOREMA DE KHINCHIN

1. FUNCIONES SUMA.

Los teoremas ergódicos precedentes son válidos con independencia del número de grados de libertad del sistema físico. Son resultados de Dinámica General. Khinchin ha propuesto un teorema ergódico que, aunque de alcance más restringido que los de Birkhoff, von Neumann y Hopf, es perfectamente aplicable a muchos de los sistemas macroscópicos reales [21]. Es un teorema asintótico en el sentido de que es válido cuando el número de grados de libertad del sistema tiende a infinito. Además, se aplica a una cierta clase de funciones más restringida que la clase de funciones integrables del teorema de Birkhoff o de la de funciones normales citadas en el capítulo anterior.

El teorema asintótico de Khinchin se aplica a "funciones suma", entendiendo por tales a aquellas funciones del espacio de las fases que se pueden escribir como suma de funciones de las coordenadas de cada partícula. Es decir:

$$f(P) = \sum_{i=1}^{N} f_i(P_i) \tag{IV.1}$$

donde N representa el número de partículas (*). Las $f_i(P_i)$ dependen de la fase P_i del espacio de las fases Γ_i del subsistema i. Naturalmente f_i traduce en dicho subsistema la misma propiedad que f representa para el sistema macroscópico.

Veamos algunas propiedades de las funciones suma que se deducen de su definición. Comencemos por un estudio de su dispersión. Para este tipo de funciones, promediando en la hipersuperficie de energía constante Σ_E se obtiene:

$$< f >_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} < f_i >_\Sigma$$

donde cada promedio del segundo miembro se puede calcular operando en el subespacio asociado a cada una de las partículas integrantes del sistema.

(*) Truesdell [16] trabaja con funciones suma del tipo $f(P) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i(P_i)$. Esta definición, si bien tiene menos sentido físico, simplifica algo los cálculos.

La dispersión en torno al promedio anterior vendrá dada por

$$\sigma^2 = \langle (f - \langle f \rangle_\Sigma)^2 \rangle_\Sigma =$$

$$= \langle [\sum_{i=1}^{N} (f_i - \langle f_i \rangle_\Sigma)]^2 \rangle_\Sigma$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle (f_i - \langle f_i \rangle_\Sigma)^2 \rangle_\Sigma + \sum_{i \neq k} \langle (f_i - \langle f_i \rangle_\Sigma) (f_k - \langle f_k \rangle_\Sigma) \rangle_\Sigma$$

De estos dos sumatorios el primero es del orden de N, ya que se trata de N sumandos, todos acotados por hipótesis. El segundo consta de $N(N-1)$ sumandos, cuya evaluación constituye el exclusivo objeto del cap. VIII de [4]. En él se demuestra que el segundo sumatorio es también del orden de N, al resultar cada covarianza del orden de $1/N$. Para ello se requiere que las f_i satisfagan las siguientes hipótesis:

- Cada f_i debe ser integrable en el respectivo Γ_i.
- Al aumentar N, cada f_i no debe crecer más rápidamente que determinada potencia de la energía total E. Tal condición sirve para garantizar la convergencia de los promedios sobre cada Γ_i en el paso al límite $N \to \infty$.
- La correlación entre dos de tales funciones f_i y f_j es debida exclusivamente a la restricción $E = \text{cte.}$. Para $N \to \infty$ tal correlación tiende a cero y se puede aplicar el Teorema del Límite Central (*) para calcular las características estadísticas de la función suma.

Por tanto, se llega a la conclusión de que

$$\sigma \sim N^{\frac{1}{2}} \tag{IV.2}$$

Si se define ahora

$$\sigma' \equiv \langle | f - \langle f \rangle_\Sigma | \rangle_\Sigma$$

de la desigualdad de Schwartz se deduce que (+)

(*) Como es sabido, el Teorema del Límite Central proporciona la expresión aproximada para la ley de distribución de la suma de un gran número de magnitudes aleatorias independientes [22].

(+) De $\left(\int_V g(P)\, h(P)\, d\mu \right)^2 \leq \left(\int_V [g(P)]^2\, d\mu \right) \left(\int_V [h(P)]^2\, d\mu \right)$

haciendo $g(P) = |f|$ y $h(P) = 1$ se obtiene $\langle |f| \rangle^2 \leq \langle f^2 \rangle$

$$\sigma' = \langle \, | \, f - \langle f \rangle_\Sigma \, | \, \rangle_\Sigma \quad \leq$$

$$\leq \left[\langle (f - \langle f \rangle_\Sigma)^2 \rangle_\Sigma \right]^{\frac{1}{2}} = \sigma \sim N^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV.3)}$$

2. TEOREMA ERGODICO PROBABILISTICO.

Tratemos ahora de relacionar promedios temporales y promedios de fase para dicho tipo de funciones suma. Sea M_a el conjunto de puntos de Σ_E definido por

$$M_a = \{ P \in \Sigma_E \; / \; | \langle f \rangle_\tau - \langle f \rangle_\Sigma | \geq a \}$$

siendo a una magnitud positiva arbitraria prefijada y $\langle f \rangle_\tau$ un promedio temporal del tipo que figura en (I.5). Definimos ahora

$$M_a^{\,T} \equiv \{ P \in \Sigma_E \; / \; | \langle f \rangle_T - \langle f \rangle_\Sigma | \geq \frac{a}{2}$$

siendo $\langle f \rangle_T$ un promedio temporal (I.5) ,pero sin tomar el límite $T \to \infty$. Ya que,por el teorema de Birkhoff $\langle f \rangle_T \to \langle f \rangle_\tau$ casi por doquier podemos escribir,para valores de T suficientemente grandes una desigualdad del tipo

$$m(M_a^{\,T}) \geq m(M_a) \geq \tfrac{1}{2}\, m(M_a) \qquad \text{(IV.4)}$$

De (IV.4) se deduce,haciendo uso explícito de la medida sobre Σ_E introducida en (III.1)

$$\int_{M_a^{\,T}} | \langle f \rangle_T - \langle f \rangle_\Sigma | \frac{d\mu(\Sigma_E)}{|\mathrm{grad}\ H|_{H=E}} \geq m(M_a^{\,T}) \frac{a}{2} \geq \frac{1}{4}\, m(M_a)\, a$$

$$\text{(IV.5)}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Schwartz,la integral de (IV.5) se puede escribir

$$\int_{M_a^{\,T}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(P_t)\, dt - \langle f \rangle_\Sigma \right| \frac{d\mu(\Sigma_E)}{|\mathrm{grad}\ H|_{H=E}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{M_a^{\,T}} | f(P_t) - \langle f \rangle_\Sigma | \frac{d\mu(\Sigma_E)}{|\mathrm{grad}\ H|_{H=E}} =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{M_a^T(t)} | f(P) - \langle f \rangle_\Sigma | \frac{d\mu(\Sigma_E)}{|\mathrm{grad}\ H|_{H=E}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_\Sigma | f(P) - \langle f \rangle_\Sigma | \frac{d\mu(\Sigma_E)}{|\mathrm{grad}\ H|_{H=E}} =$$

$$= \sigma' \ m(\Sigma_E) \ \frac{1}{T} \int_0^T dt = \sigma' \ m(\Sigma_E) \qquad \text{(IV.6)}$$

Como los primeros miembros de (IV.5) y (IV.6) son iguales, la comparación de los segundos da

$$\frac{m(M_a)}{m(\Sigma_E)} \leq \frac{4\sigma'}{a} \qquad \text{(IV.7)}$$

El primer miembro de (IV.7) representa la probabilidad de que al elegir al azar un sistema de la colectividad microcanónica cometamos un error de magnitud mayor que a al identificar el promedio temporal infinito de una determinada función de fase sobre el mismo con el promedio microcanónico de dicha función. Como los promedios de funciones suma son, por definición, del orden de N, y para ellas $\sigma' \sim N^{\frac{1}{2}}$, un criterio de equivalencia entre promedios se obtiene tomando para a el valor

$$a = N^{3/4} \sim \sigma'^{\,3/2}$$

De esta forma las discrepancias entre promedios son pequeñas comparadas con los promedios. Así tendremos:

$$\mathrm{Prob}\ \{ \ | \langle f \rangle_T - \langle f \rangle_\Sigma | > a \sim N^{3/4} \} \sim N^{-1/4} \qquad \text{(IV.8)}$$

Una simple inspección del resultado muestra que la elección del valor de a es arbitraria dentro de ciertos límites.

La expresión (IV.8) proporciona información sobre el orden de magnitud del error cometido al identificar promedios. Como este error resulta pequeño al ser N grande, la formulación de Khinchin proporciona un teorema ergódico probabilístico para sistemas macroscópicos exento, en principio, de la hipótesis de transitividad métrica.

El teorema de Khinchin presenta también algunas dificultades que conviene discutir. El paso de la fórmula (IV.7),de naturaleza matemática,a la (IV.8),de pleno sentido físico,se ha hecho suponiendo implícitamente la conexión medida-probabilidad y,por tanto,que es poco probable que los conjuntos de medida microcanónica pequeña se den en la práctica. Así,las fases iniciales se consideran aleatorias y su distribución de probabilidad se supone absolutamente contínua con respecto a la medida microcanónica,en el sentido explicitado en el apartado III.3 . El problema consiste en que el postulado de continuidad absoluta,necesario para obtener resultados físicamente relevantes,sólo se aplica correctamente cuando la medida se define sobre una superficie métricamente indescomponible. Y una de las ventajas del teorema de Khinchin era,precisamente,el no suponer tal indescomponibilidad.

Truesdell [16] trata de eliminar la dificultad anterior mediante la introducción de las llamadas integrales "controlables" ,que son aquellas integrales de movimiento normales que representan magnitudes físicas cuyo valor puede ser determinado mediante observaciones macroscópicas. Si existen k integrales de este tipo independientes se puede definir una medida invariante en una hipersuperficie $\mathfrak{m}$ de 2N-k dimensiones, en forma semejante a como se procede en la aplicación del teorema de Lewis. Se obtiene así la llamada distribución polimicrocanónica,que se reduce a la microcanónica en el caso habitual en que la única integral controlable sea la energía.

Las integrales no controlables (integrales residuales en la notación de Truesdell) tienen forma y valores desconocidos para el observador macroscópico y no son necesariamente normales. Por supuesto,lo interesante sería poder asegurar que las integrales residuales son irrelevantes para la igualdad entre los promedios temporales y promedios en el espacio de las fases; pero,por el teorema de Lewis,que precisa del conocimiento del invariante completo,sabemos que esto no es así. La propuesta de Truesdell consiste en suponer que las trayectorias para las que el teorema de Khinchin no se cumpliría constituyen un conjunto de medida pequeña en $\mathfrak{m}$. A tal fin se consideran los valores de las integrales residuales como variables aleatorias con "igual probabilidad a priori" en términos de la medida polimicrocanónica. Así se llega a la llamada hipótesis de la colectividad nula : " Al calcular promedios temporales hay que conformarse con obtener resultados válidos excepto para conjuntos de pequeña probabilidad polimicrocanónica,definida en términos de integrales controlables únicamente." [23]. Desde luego tal supuesto es una forma velada y más débil de introducir la hipótesis de continuidad absoluta.

Truesdell considera que la hipótesis de la colectividad nula es el mínimo compromiso al que hay que llegar para hacer compatibles teoría ergódica y colectividades. Por supuesto admite que la probabilidad polimicrocanónica, basada en las integrales controlables únicamente, no tiene el sentido físico de las tradicionales. Es simplemente un artificio que establece el criterio que permite determinar las trayectorias sin relevancia para el teorema de Khinchin.

El método de Khinchin también ha sido criticado utilizando el argumento conocido como la "paradoja de las interacciones débiles". Esencialmente el razonamiento es el siguiente: la demostración de Khinchin es válida únicamente para sistemas con hamiltoniano separable

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i(P_i)$$

Sin embargo, en este caso, existen N integrales de movimiento triviales $H_i = E_i$, con lo que no puede existir ergodicidad respecto a la distribución microcanónica.

A propósito de esta crítica nos gustaría señalar, en primer lugar, que en la demostración de Khinchin [21] no aparece explícitamente la hipótesis de la separabilidad del hamiltoniano. Lo riguroso sería afirmar, con Truesdell [24] que " la esencia del método de Khinchin consiste en considerar funciones cuya dispersión fásica es pequeña; aunque los detalles (de la demostración) han sido establecidos sólo para funciones suma sobre un sistema con hamiltoniano separable, muchos otros casos quedan por estudiar".

Independientemente de lo anterior la existencia de un hamiltoniano separable es realista sólo si se supone que el término de interacción, de orden λ, es despreciable frente a la energía de cualquier componente. Los resultados obtenidos entonces con hamiltonianos separables constituyen una aproximación al problema real. Por tanto se están manejando dos procesos de paso al límite: $N \to \infty$ y $\lambda \to 0$, cuyo orden de aplicación es importante. La paradoja resulta de tomar primero el límite $\lambda \to 0$. Pero si se toma primero el límite $N \to \infty$, Mazur y van der Linden [25] han demostrado que las principales conclusiones de la teoría de Khinchin pueden extenderse a sistemas con interacciones débiles entre sus componentes introduciendo hipótesis suplementarias. Además, el dar prioridad al límite $N \to \infty$ parece apropiado puesto que una interacción muy pequeña frente a la energía de las componentes puede conducir a efectos macroscópicos tales como transiciones de fase.

En cualquier caso puede afirmarse que la Teoría Ergódica Clásica queda lejos de estr definitivamente establecida. Por un lado existe una dificultad de tipo dinámico relacionada con la hipótesis de transitividad métrica, o lo que es lo mismo, con la imposibilidad de establecer las integrales de movimiento del sistema. Un segundo origen de dificultades radica en la necesidad de introducir algún postulado tipo continuidad absoluta de la probabilidad respecto de la medida con objeto de eliminar la contribución de trayectorias excepcionales. Desde luego se trata de una hipótesis estadística más débil que la teoría de colectividades, pero no obstante imposibilita el justificar la Mecánica Estadística en una base exclusivamente dinámica.

CAPITULO V . ERGODICIDAD EN MECANICA CUANTICA

1. SOBRE LA MATRIZ DENSIDAD.

Supongamos, por analogía con el tratamiento clásico anterior, que el sistema está aislado y es finito, de modo que el espectro del hamiltoniano H se puede suponer discreto y con eventuales degeneraciones. Si la base del espacio de Hilbert la constituyen unas ciertas funciones $\varphi_i(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n) \equiv \varphi_i(Q)$, la función $\Psi(Q;t)$ que describa el sistema cuántico formado por N partículas, se podrá escribir así:

$$\Psi(t) \equiv \Psi(Q;t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \; \varphi_i(Q)$$

Suponemos todas las funciones normalizadas a la unidad, con lo que los coeficientes $c_i(t)$ definen el vector $\Psi(t)$ en el espacio de Hilbert, con el extremo fijo en la hipersuperficie

$$\sum_{i=1}^{\infty} | c_i(t) |^2 = 1$$

La trayectoria de este punto en la hiperesfera unidad viene dada por la solución de la ecuación

$$H \; \Psi(t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t)$$

Esta evolución se puede caracterizar de igual forma por un grupo de transformaciones U_t que dejan la hiperesfera invariante. Si el sistema está representado por un hamiltoniano independiente del tiempo, se prueban sin dificultad las siguientes relaciones

$$U_t = \exp\left(- \frac{i \, t \, H}{\hbar} \right)$$

$$\Psi(t) = U_t \; \Psi(0)$$

$$U_t \; U_s = U_{t+s}$$

$$U_0 = \mathbb{1} \qquad \text{(V.1)}$$

Para calcular valores esperados se opera del modo conocido. Si $\Psi(t)$ representa el estado del sistema y A es el operador asociado a una propiedad física, el valor esperado de la misma se escribe así:

$$A(t) \equiv (\Psi , A \Psi) = \sum_{i,j} c_j^*(t) \; c_i(t) \; (\varphi_j , A \varphi_i)$$

La igualdad anterior se puede escribir

$$A(t) = \sum_{i,j} \rho_{ij}(t) \, (\varphi_j , A \varphi_i) = \mathrm{Tr} \, [\rho(t) \, A] \qquad \text{(V.2)}$$

Si se define el operador densidad ρ correspondiente al estado $\Psi(t)$ mediante los elementos de matriz :

$$\rho_{ij}(t) = c_j^*(t) \; c_i(t)$$

Se puede demostrar

1) ρ es hermítico.
2) ρ es de traza unidad.
3) $\rho = P_\Psi$. Es decir: ρ es un operador proyección sobre el estado Ψ, con lo que $\rho^2 = \rho$.
4) La ecuación de evolución de la matriz densidad es (*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \, [\rho , H]$$

y la solución se puede escribir

$$\rho(t) = U_t \; \rho(0) \; U_t^\dagger$$

De modo que $\rho(t)$ proporciona otra posibilidad de representar el sistema cuántico en el estado puro $\Psi(t)$.

(*) Puede pensarse que es lógica la ecuación (V.3) para dar la evolución de un operador. Pero este razonamiento es incorrecto. En primer lugar (V.3) difiere en el signo de la ecuación de Heisenberg; además estamos trabajando en imagen de Schrödinger, en la cual los observables tienen dependencia temporal explícita. Para resumir: $\rho(t)$ no representa una magnitud física, y por tanto su ley de evolución debe deducirse únicamente de su definición.

2. COLECTIVIDADES EN MECANICA CUANTICA

Las colectividades en Mecánica Estadística Cuántica pueden ser introducidas en forma análoga a como lo son en M.E. Clásica. La naturaleza incompleta de las observaciones macroscópicas (*) nos permite asociar al sistema real una colectividad de sistemas que corresponden a estados microscópicos compatibles con nuestra observación. De esta forma a un sistema físico macroscópico le asociamos una colectividad de n sistemas independientes realizando todos ellos el mismo macroestado. Cada uno de ellos estaría descrito en un caso puro por una cierta función de onda $\Psi^{(\alpha)}(t)$, donde $\alpha = 1,2,\ldots,n$ y para cada una de ellas existe el desarrollo

$$\Psi^{(\alpha)}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(\alpha)}(t)\ \varphi_i$$

A cada una de estas funciones le corresponde la matriz densidad

$$\rho_{ij}^{(\alpha)}(t) = c_j^{(\alpha)*}(t)\ c_i^{(\alpha)}(t)$$

Según lo visto anteriormente el valor medio cuántico de la magnitud A en el sistema representado por $\Psi^{(\alpha)}(t)$ es

$$A^{(\alpha)}(t) = \mathrm{Tr}\,(\rho^{(\alpha)} A)$$

y el valor medio de A en la colectividad valdrá:

$$\overline{A(t)} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \mathrm{Tr}\,(\rho^{(\alpha)} A) = \sum_{ij}\left(\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{ij}^{(\alpha)}\right) A_{ji}$$

Basta definir una "matriz densidad media" de la forma

$$\overline{\rho_{ij}} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_{ij}^{(\alpha)} = \overline{c_j^{(\alpha)*}(t)\ c_i^{(\alpha)}(t)} \qquad \text{(V.4)}$$

para que los promedios sobre la colectividad se escriban simplemente

$$\overline{A(t)} = \mathrm{Tr}\,(\bar{\rho} A) \qquad \text{(V.5)}$$

(*) La incompletitud a que nos referimos aquí tiene el mismo carácter que en M. E. Clásica, y no debe confundirse con la debatida completitud de la descripción mecánico-cuántica.

Esta nueva matriz $\bar{\rho}$ caracteriza la colectividad y es hermítica, de traza unidad, aunque en general ya no es válida la igualdad

$$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}$$

La evolución de $\bar{\rho}$ se deduce de las fórmulas (V.3) y (V.4):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[\bar{\rho} , H \right] \qquad (V.6)$$

y representa el análogo cuántico al teorema de Liouville. Es equivalente a la relación

$$\bar{\rho}(t) = U_t \; \bar{\rho}(o) \; U_t^{\dagger}$$

con lo que el valor medio de un observable tomado sobre la colectividad representada por $\bar{\rho}$ se escribe

$$\overline{A(t)} = Tr \left(\bar{\rho}(t) \, A \right) = Tr \left(U_t \; \bar{\rho}(0) \; U_t^{\dagger} \right) \qquad (V.7)$$

De esta forma se definen promedios y colectividades sin recurrir al espacio de las fases, que en Mecánica Cuántica es muy peculiar como consecuencia las relaciones de incertidumbre para magnitudes canónicas conjugadas. Los promedios en el espacio de las fases se sustituyen en el formalismo cuántico por el cálculo de trazas, y la invariancia de éstas bajo transformaciones unitarias garantiza la de $\overline{A(t)}$, como físicamente se podía prever.

Se pueden definir colectividades estacionarias, para las cuales $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0$ y entre éstas la de mayor relevancia para el problema ergódico es la microcanónica, que corresponde a una distribución uniforme en torno a una estrecha banda de energías de anchura δE, característica de la imprecisión de la medición macroscópica . Quiere decir que los niveles de energía de la colectividad estan contenidos en el intervalo $(E , E+\delta E)$ y la matriz densidad viene dada mediante una función de la energía que sea constante dentro del intervalo. O sea:

$$\bar{\rho}_{ij} = \begin{cases} \bar{\rho}_0 \; \delta_{ij} & \text{si} \quad E \leq E_i \leq E+\delta E \\ 0 & \text{para otras } E_i \end{cases}$$

siendo $\bar{\rho}_0 = \frac{1}{n}$ si hay n valores propios de la energía dentro del intervalo y no hay degeneración.

De otra forma: dados E y $E+\delta E$ se toman los valores propios de H comprendidos en ese intervalo. Sea n el número de éstos, correspondientes a los valores propios E_i y funciones propias respectivas Ψ_i (suponiendo que no hay degeneración). La matriz densidad de la colectividad microcanónica es

$$\bar{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_{\Psi_i} \qquad (V.8)$$

De acuerdo con una interpretación usual de la relación de incertidumbre energía-tiempo, para una obsevación de duración Δt hay una incertidumbre en la energía dada ΔE, del rango de $\hbar/\Delta t$. La magnitud δE que caracteriza el intervalo que define la colectividad microcanónica será, en general, mucho mayor que ΔE, puesto que está asociada a observaciones macroscópicas de del sistema. Por tanto es razonable suponer

$$\delta E \gg \Delta E$$

Aunque en Mecánica Clásica la idea es la misma, allí supusimos que podíamos tomar desde un principio el límite $\delta E \to 0$, con lo que obteníamos la hipersuperficie Σ_E. En rigor deberíamos haber definido la colectividad microcanónica en el hipervolumen comprendido entre Σ_E y $\Sigma_{E+\delta E}$. Pero en el marco teórico de la Mecánica Clásica no hay limitación para el valor mínimo de δE, y de ahí la posibilidad de tomarlo como cero. En Mecánica Cuántica la cuarta relación de incertidumbre impide tal cosa.

Al no utilizarse en Mecánica Cuántica el espacio de las fases como espacio de descripción, no se puede trasladar mecánicamente el postulado de igual probabilidad "a priori" (relación entre medida y probabilidad en Γ). Su equivalente es el de igual amplitud de probabilidad "a priori" y fases distribuídas al azar para los estados cuánticos no degenerados de un sistema, una especie de equiprobabilidad sobre la parte accesible de la hiperesfera unidad. Finalmente conviene indicar que a partir de aquí el problema que nos ocupa será, igual que en teoría clásica, el de justificar la introducción de colectividades y, en particular, el de igualar promedios calculados sobre colectividades con promedios temporales, susceptibles de representar magnitudes físicas macroscópicamente observables.

3. TEOREMA ERGODICO ORDINARIO EN MECANICA ESTADISTICA CUANTICA.

También en Mecánica Estadística Cuántica se pueden demostrar varios teoremas ergódicos. Su sentido es análogo al que tenían en Mecánica Estadística

Clásica. Ahora la evolución del sistema, que suponemos finito y aislado, viene determinada por el movimiento del extremo de un cierto vector $\Psi(t)$ sobre la hiperesfera unidad del espacio de Hilbert. A todo observable representado por un operador hermítico, le corresponde un valor esperado cuántico $(\Psi(t), A\Psi(t)) = A(t)$ que queda definido por la trayectoria del extremo de $\Psi(t)$. Al igual que en el caso clásico se supone que la medida experimental no proporciona $A(t)$ sino un promedio temporal del tipo (*)

$$\frac{1}{T} \int_0^T A(t)\, dt$$

La teoría ergódica en Mecánica Estadística Cuántica trata de encontrar igualdades entre este tipo de promedios y los calculados sobre la colectividad microcanónica. Veremos que dadas las especiales propiedades de los estados cuánticos estacionarios este propósito encuentra dificultades adicionales.

Sea un sistema en un estado puro descrito por $\Psi(t)$. Se trata de probar la existencia del límite

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t)\, dt \tag{V.9}$$

Si E_i y Ψ_i son los valores propios y las funciones propias del hamiltoniano tenemos

$$\Psi(0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(o)\, \Psi_i \quad \text{,con} \quad c_i(o) = r_i \exp(i\,\alpha_i)$$

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \exp(i\,\alpha_i) \exp\left(-\frac{i\,E_i\,t}{\hbar}\right) \Psi_i \tag{V.10}$$

La matriz densidad del estado puro representado por $\Psi(t)$ será

$$\rho_{ij}(t) = r_i\, r_j \exp[\, i(\alpha_i - \alpha_j)\,] \exp\left[-i\,(E_i - E_j)\frac{t}{\hbar}\right] =$$

$$= \rho_{ij}(o) \exp\left[-i\,(E_i - E_j)\frac{t}{\hbar}\right]$$

con lo que tendremos, para el promedio cuántico $A(t)$ de un observable A

(*) Nótese que aunque tal identificación teoría-experimento es habitual, resulta difícilmente conciliable con la perturbación introducida en toda medición.

$$A(t) = \sum_{ij} r_i \; r_j \; \exp[i(\alpha_i-\alpha_j)] \; \exp[-i(E_i-E_j)\frac{t}{\hbar}] \; A_{ji}$$

y un promedio temporal se escribirá:

$$\frac{1}{T}\int_0^T A(t)\, dt = \sum_{ij} r_i \, r_j \, A_{ji} \exp[i(\alpha_i-\alpha_j)] \left\{ \frac{1}{T}\int_0^T \exp[-i(E_i-E_j)\frac{t}{\hbar}]\, dt \right\}$$

Tomando el límite para $T \to \infty$ obtenemos

$$< A(t) >_T = \sum_i r_i^2 \; A_{ii} \qquad (V.11.i)$$

en el caso de que no haya degeneración, y

$$< A(t) >_T = \sum_i r_i^2 \; A_{ii} + \sum_{i \neq j} r_i \; r_j \; A_{ji} \exp[i(\alpha_i-\alpha_j)] \qquad (V.11.ii)$$

en el caso de que la haya (la segunda sumatoria se extiende a todos los pares de índices distintos a los que corresponda el mismo valor de la energía). Esta expresión (V.11) constituirá el análogo al teorema de Birkhoff y de ella se deduce que el promedio temporal, sobre un estado determinado, no depende de las condiciones iniciales (las fases α_i) cuando no hay degeneración. En este caso, y teniendo en cuenta que el sistema se encuentra en el estado representado por (V.10), la colectividad está representada por un estado mezcla formado por un conjunto de sistemas descritos por funciones similares a $\Psi(t)$ pero con fases iniciales arbitrarias α_i distribuídas uniformemente entre 0 y 2π. La matriz densidad asociada será, según (V.4)

$$\bar{\rho}_{ij} = r_i \; r_j \; \exp[-i(E_i-E_j)\frac{t}{\hbar}] \; \frac{1}{4\pi^2} \iint \exp[i(\alpha_i-\alpha_j)] \; d\alpha_i \; d\alpha_j =$$

$$= r_i^2 \; \delta_{ij}$$

y el promedio calculado con $\bar{\rho}_{ij}$ será

$$< A >_{\mathfrak{J}} = \mathrm{Tr}\,(\bar{\rho} \; A) = \sum_i r_i^2 \; A_{ii} \qquad (V.12)$$

Comparando (V.11) y (V.12) se llega al siguiente resultado: el promedio temporal y el promedio estadístico son iguales si el sistema no presenta degeneración en la energía. Esta ausencia de degeneración, que es condición necesaria y suficiente, aparece como el análogo cuántico de la transitividad métrica. Y ambos no se dan cuando hay constantes de movimiento, pues en el formalismo cuántico ello equivale a existencia de observables que conmutan con el hamiltoniano e implica a su vez degeneración de la energía. Del mismo modo que una imagen geométrica de la transitividad métrica puede darse diciendo que la trayectoria invade todo conjunto de medida no nula en Σ_E, la hipótesis cuántica equivalente de no degeneración en el espectro de H se puede interpretar como que la trayectoria de $\psi(t)$, sobre la esfera unidad, invade, en el sentido anterior, todo conjunto de medida no nula entre los que representan la colectividad estadística descrita por la matriz densidad de pesos respectivos r_i^2.

La hipótesis de no degeneración del espectro del hamiltoniano es tan restrictiva que hace que el teorema anterior carezca prácticamente de campo de aplicación. La degeneración es un hecho en los sistemas cuánticos más simples: átomos y moléculas. Por otra parte, como puede observarse a partir de (V.11), la no degeneración no es necesaria para la igualdad de los promedios temporal y estadístico si el sistema se encuentra inicialmente en un estado propio de la energía. Pero un sistema macroscópico no estará en general representado por un estado estacionario. Basta con considerar el siguiente argumento cualitativo: por tratarse de un sistema macroscópico encerrado en un volumen finito, los niveles de energía están tan próximos que las interacciones entre el sistema y las paredes del recipiente impiden que el sistema mantenga constante su energía.

Además del teorema que acabamos de exponer y comentar existen, al igual que en el caso clásico, otros teoremas que, partiendo de planteamientos más limitados, tratan de adaptarse a sistemas físicos más próximos a la realidad. Para una demostración y crítica de los mismos puede consultarse la obra ya citada de Jancel [10]. Dado el carácter general de esta publicación nos limitaremos, en el resto del capítulo, a exponer poco más que un simple enunciado de los mismos.

4. TEOREMA DE HOPF.

Con este nombre nos referiremos al equivalente cuántico del teorema clásico de Hopf. Sea $\overline{\rho}(t)$ la matriz densidad representativa de una colectividad estdística. El promedio del observable A sobre la colectividad vendrá dado por

$$\mathrm{Tr}[\, A\, \bar{\rho}(t)\,] = \mathrm{Tr}[\, A\, W_t\, \bar{\rho}(0)\,]$$

con W_t definido por

$$\bar{\rho}(t) = W_t\, \bar{\rho}(0) = U_t\, \bar{\rho}(0)\, U_t^{\dagger}$$

Se demuestra que si, además de la no degeneración del hamiltoniano, no existen frecuencias de resonancia en su espectro (es decir, si $E_i - E_j \neq E_k - E_l$ para todo i,j,k,l), y éste es fuertemente degenerado frente a observaciones macroscópicas, se verifica:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left|\, \mathrm{Tr}\,[A\, W_t \bar{\rho}(0)\,] - \mathrm{Tr}\,[\, A\, \rho^{*}(0)\,]\, \right|^2 dt = 0 \qquad \text{(V.13)}$$

donde $\rho^{*}(0)$ representa una distribución límite. (Obsérvese la analogía entre esta expresión y la (II.6)).

La no existencia de frecuencias de resonancia en el espectro del hamiltoniano es la condición cuántica equivalente a la clásica de indescomponibilidad métrica del espacio producto $\Gamma \times \Gamma$. En cambio, la condición de fuerte degeneración macroscópica no tiene análogo clásico y aparece como una dificultad adicional del tratamiento cuántico. El sentido exacto de esta condición se especifica cuando se hace la demostración [26]. Tal hipótesis queda automáticamente satisfecha utilizando los llamados "observables macroscópicos" introducidos por von Neumann [27].

5. OBSERVABLES MACROSCOPICOS.

Los observables microscópicos no son, en general, simultáneamente medibles. En cambio sí parece lógico que lo sean los observables macroscópicos. De ahí el interés en definir éstos a partir de los microscópicos, pero con las propiedades convenientes de conmutatividad. Seguimos el método de van Kampen [28] y comenzamos con el operador energía. Una medida macroscópica de la misma está siempre caracterizada por una ambigüedad δE , que es la que se utiliza para definir la colectividad microcanónica. Puesto que el número de grados de libertad es habitualmente grande siempre hay un gran número de valores propios de la energía en el intervalo $\delta E \gg \Delta E$ y, por tanto, una medida macroscópica no permite conocer valores propios de la energía. Lo que tiene sentido es considerar, en el espacio de Hilbert, "celdas de energía" $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \ldots \mathcal{E}_\nu, \ldots$ donde la celda $\mathcal{E}_\nu$ contiene todos los elementos del espacio de Hilbert generados por los estados propios del hamiltoniano H con valores propios comprendidos en el intervalo

$$\left(\mathcal{E}_\nu - \frac{\delta\mathcal{E}_\nu}{2} , \mathcal{E}_\nu + \frac{\delta\mathcal{E}_\nu}{2} \right)$$

Luego, en lugar del hamiltoniano microscópico

$$H = \sum_{i\lambda} E_i P_{\Psi_{i\lambda}} = \sum_i E_i P_{\Psi_i}$$

(P_{Ψ_i} es el proyector sobre el subespacio de valor propio E_i)

tendría más sentido el hamiltoniano macroscópico

$$\mathcal{H} = \sum_\nu \mathcal{E}_\nu P_\nu$$

$$\text{siendo } P_\nu = \sum_{i=1}^{s_\nu} P_{\Psi_i} \tag{V.14}$$

y s_ν el número de estados propios independientes contenidos en la celda $\mathcal{E}_\nu$. Por supuesto este procedimiento ha introducido una degeneración adicional a la del problema de valores propios de H. Ahora cada "valor propio" $\mathcal{E}_\nu$ es s_ν veces degenerado, siendo

$$s_\nu = \mathrm{Tr}\ P_\nu \tag{V.15}$$

Se trata ahora de construir un observable macroscópico $\mathcal{G}$ que conmute con $\mathcal{H}$, partiendo de un operador microscópico A correspondiente a un observable cuántico no medible simultáneamente con H. Limitándonos a órdenes de magnitud tenemos

$$\Delta E \cdot \Delta A \sim | \langle [A , H] \rangle |$$

Las observaciones macroscópicas se realizan con una limitación dada por $\delta\mathcal{G} \gg \Delta A$, de modo que

$$\delta\mathcal{E}\ \delta\mathcal{G} \gg \Delta E\ \Delta A$$

En representación de energía:

$$[A, H]_{ij} = (E_i - E_j)\, A_{ij} \sim \Delta E\, \Delta A \ll \delta\mathcal{E}\, \delta G \qquad (V.16)$$

Si se toman i y j tales que $E_i - E_j \sim \delta\mathcal{E}$

$$A_{ij} \sim \frac{\Delta E\, \Delta A}{\delta\mathcal{E}} \ll \delta G \qquad (V.17)$$

De otro modo: los elementos A_{ij} que corresponden a diferencias $E_i - E_j$ del orden de $\delta\mathcal{E}$ se pueden despreciar, lo que supone una preponderancia de elementos relevantes en torno a la diagonal principal, y la banda relevante tiene poca anchura comparada con el tamaño de las celdas $\mathcal{E}_\nu$, según la última desigualdad. Despreciando los elementos de matriz irrelevantes y agrupando los restantes en submatrices, correspondientes cada una a una celda, construimos una matriz que corresponde al operador macroscópico G. Puede comprobarse que G y $\mathcal{H}$ conmutan y, por tanto, pueden medirse simultáneamente, puesto que

$$[G, \mathcal{H}]_{\alpha\beta} = (\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta)\, G_{\alpha\beta} = 0 \qquad si \quad \alpha \neq \beta$$

ya que los únicos elementos no nulos de G son aquellos para los que $\alpha = \beta$ (índices correspondientes a una misma celda).

De esta forma se pueden construir operadores macroscópicos que conmuten con el hamiltoniano $\mathcal{H}$ y se puede suponer que el estado macroscópico queda definido por la energía macroscópica y por un conjunto de operadores macroscópicos $\{ G, B, C, \ldots \}$ para los que es posible encontrar una base propia común. Los índices se referirán siempre a celdas, no a los valores propios mecánico-cuánticos correspondientes a un tratamiento exhaustivo.

6. TEOREMA DE VON NEUMANN.

En el tratamiento de von Neumann del problema ergódico [9] se sustituyen los observables microscópicos $A, B, \ldots$ por los observables macroscópicos respectivos $G, B, \ldots$. Designemos por $G(t)$ el valor esperado cuántico en el estado puro $\Psi(t)$ (es usual limitarse al caso puro, porque la generalización a mezclas no ofrece mayores problemas) de modo que

$$G(t) = \mathrm{Tr}\,(P_{\Psi(t)}\; G)$$

siendo $P_{\Psi(t)}$ el proyector sobre $\Psi(t)$.

Para calcular promedios estadísticos se generaliza la colectividad microcanónica suponiendo que cada estado de la misma celda de energía $\mathcal{E}_\nu$ tiene la misma probabilidad. De esta forma se pueden calcular promedios estadísticos que designaremos por

$$\bar{G} = \mathrm{Tr}\,[\,\tilde{\rho}(0)\, G\,]$$

$$\text{con}\quad \tilde{\rho}(0) = \sum_\nu \frac{\mathrm{Tr}(P_{\Psi(0)}\, P_\nu)}{\mathrm{Tr}\, P_\nu}\; P_\nu$$

siendo $\tilde{\rho}$ el operador que caracteriza la distribución microcanónica. Tiene sentido calcular el límite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [\,G(t) - \bar{G}\,]^2\, dt \qquad \text{(V.18)}$$

y deducir bajo qué condiciones la expresión anterior se anula. No parece admisible la influencia de una cierta subdivisión del espacio de Hilbert en celdas, que por un lado es necesaria para poder definir G a partir de A y por otro resulta una subdivisión arbitraria por cuanto lo es la elección de sus centros. Para eliminar esta arbitrariedad von Neumann calcula el valor de (V.18) promediado sobre las posibles subdivisiones del espacio de Hilbert en celdas macroscópicas (*). Para hallar este promedio se utiliza la hipótesis de equiprobabilidad para todos los observadores macroscópicos (todas las posibles subdivisiones del espacio de Hilbert en celdas macroscópicas). Y con ésta, más las habituales de no degeneración y ausencia de frecuencias resonantes en el espectro del hamiltoniano, von Neumann demuestra que el promedio para todos los observadores macroscópicos de la expresión (V.18) es del orden de $N/\bar{s}_\nu$ siendo N el número de celdas y $\bar{s}_\nu$ el número medio de estados propios de la energía por celda macroscópica $\mathcal{E}_\nu$.

(*) Aunque a diferentes macro-observadores corresponden diferentes subdivisiones en celdas ($\{ G_\nu^{(\alpha)}, B_\nu^{(\alpha)}, \ldots \}$ para el observador "α" y $\{ G_\mu^{(\beta)}, B_\mu^{(\beta)}, \ldots \}$ para el observador "β") se supone que cada macro-observador determina el mismo número de celdas $\mu = \nu = \ldots = N$, asociado a la precisión de los aparatos con que se efectúa la medida.

El teorema resulta de aplicación física dado que la pequeñez del cociente $N / \bar{s}_{\nu}$ está garantizada por tratarse de medidas macroscópicas.

En trabajos posteriores [29] se ha puesto de relieve que las hipótesis de no degeneración y ausencia de frecuencias resonantes no son necesarias para la demostración del teorema de von Neumann. Podría pensarse que esto constituye una simplificación, pero si con tan sólo la condición de igual probabilidad para todas las subdivisiones se puede demostrar el teorema, no hay criterios para saber si un sistema, supuesto que el observador efectúa medidas macroscópicas, es ergódico o no. Más bien se llega a la conclusión de que todos los sistemas macroscópicos son ergódicos y éste es un resultado que, por su generalidad, ha hecho poner en duda la validez de la hipótesis de igual probabilidad para todos los observadores macroscópicos.

7. OTRAS ALTERNATIVAS AL PROBLEMA ERGODICO CUANTICO.

Las objeciones al teorema de von Neumann se han dirigido, en concreto, contra la hipótesis de igual probabilidad para todas las subdivisiones en celdas y el consiguiente promedio sobre macro-observadores. No obstante, la esencia de la introducción del "coarse-grained" parece apropiada para el es establecimiento de otros teoremas ergódicos cuánticos.

Entre los trabajos más relevantes en este sentido figuran los del "grupo de Milán" [30]. Tras una crítica del método de von Neumann (*) el citado grupo presenta una solución alternativa al problema ergódico, sustituyendo el promedio sobre macro-observadores de von Neumann por un promedio sobre todos los estados iniciales posibles del sistema. Utilizando las propias palabras de Loinger añadiremos que "... Desde un punto de vista puramente matemático, la relación entre nuestra forma de promediar y la de von Neumann es análoga a la que hay entre las interpretaciones "activa" y "pasiva" de toda transformación de coordenadas ...". Los resultados obtenidos son muy similares a los de von Neumann, pero empleando tan sólo dos hipótesis generales: sistema macroscópico con muchos grados de libertad y unitariedad del operador evolución. Aunque de diferente contenido físico

(*) En el trabajo que se cita, la crítica se resume así: "... En conclusión, el resultado de von Neumann, que es únicamente una consecuencia matemática de promediar sobre la subdivisión en celdas, tiene un significado abstracto, puramente geométrico, desprovisto de toda significación física".

las dos hipótesis de equiprobabilidad,esenciales en los respectivos teoremas,no son susceptibles de verificación para los sistemas físicos ordinarios. No proporcionan,por tanto,criterios prácticos para decidir si un sistema es ergódico o no. El promedio sobre estados iniciales resulta también ser sólo un recurso matemático.

Un trabajo interesante por tratar de obtener un teorema ergódico cuántico en una línea completamente diferente de la marcada por von Neumann es el de Ludwig [31]. Parte de un rechazo del concepto de observable macroscópico tal como lo introduce von Neumann,basándose en que tal concepto debería definirse a partir del sistema,y no del observador,supuesto un gran número de grados de libertad para el mismo. Se trata de dar criterios de ergodicidad basándose en características del sistema (objetivas) y no en las de las observaciones (subjetivas). Tras introducir nuevos conceptos, como los de "discernibilidad entre dos estados" y "medida de discernibilidad" para tener en cuenta el carácter macroscópico del sistema,obtiene la siguiente condición suficiente para la existencia de ergodicidad:

$$\| \Psi_j - P_i \Psi_j \| \ll 1$$

donde Ψ_j es un vector propio cualquiera del hamiltoniano y P_i es el operador proyección sobre una celda caracterizada por un máximo de entropía. Condiciones de ergodicidad similares han sido obtenidas por Prosperi y Scotti [32].

Dado que,en cualquier caso,los teoremas ergódicos cuánticos rigurosamente demostrados resultan inaplicables a los sistemas reales,parece apropiado llegar a la conclusión de que es muy difícil probar la existencia de sistemas físicos ergódicos. Este argumento ha llevado a Jancel [33] a establecer,con restricciones similares a las de Khinchin en clásica,teoremas ergódicos cuánticos probabilísticos. Pero dado que para llegar a ellos se utiliza el promedio sobre observadores macroscópicos en el sentido de von Neumann,no los revisaremos aquí,a la vista de la ya comentada irrelevancia física de tales promedios.

CAPITULO VI. TEORIA ERGODICA MODERNA

1. INTRODUCCION.

En los capítulos precedentes se ha expuesto, en síntesis, la que podríamos llamar teoría ergódica ordinaria. Se ha desarrollado con mayor profundidad la ergodicidad de sistemas clásicos porque la teoría ergódica cuántica no ha proporcionado resultados de mayor relevancia. Así, a pesar de los distintos teoremas, de sus aplicaciones a sistemas reales, y de los intentos por superar las dificultades que tal aplicabilidad originaba, la conclusión final es que el problema ergódico no está rigurosamente resuelto. Quizás la única posibilidad actual de avance en cuanto a la solución efectiva de dicho problema, se basa en unas directrices marcadas por físico-matemáticos de la que podríamos llamar "Escuela Rusa", a partir de los años cincuenta. Una importante reseña bibliográfica de los trabajos que han marcado esta pauta, así como una introducción rigurosa a la teoría ergódica moderna, se encuentra en el libro de Arnold y Avez titulado "Ergodic Problems of Classical Mechanics"[11]. En este capítulo trataremos de exponer sucintamente las bases de esta teoría ergódica moderna.

Los conceptos que vamos a introducir en los apartados siguientes se aplican a sistemas dinámicos abstractos que son generalizaciones de los sistemas de la Mecánica Clásica. Tales sistemas se pueden clasificar atendiendo a ciertas propiedades asintóticas de su evolución temporal. Y esta clasificación se realiza con una cierta jerarquía, en el sentido de que los sistemas de una cierta clase automáticamente son sistemas de la clase inferior, como tendremos ocasión de comprobar.

Por supuesto esta nueva descripción no se limita a introducir definiciones que sirvan únicamente para plantear el problema ergódico en otro lenguaje, sino que con estas directrices se ha conseguido la resolución de problemas prácticos reales como puede ser el demostrar la ergodicidad de un sistema de esferas duras en un volumen paralelepipédico con paredes absolutamente reflectantes (gas de Boltzmann-Gibbs) [2]. Por todo ello nos parece que una puesta a punto en ergodicidad, por escasas pretensiones que tenga, no puede pasar por alto la existencia de estos modernos tratamientos. En esta introducción nos limitaremos a exponer métodos generales y teoremas cuyas demostraciones rigurosas, insistimos, se encuentran en el libro de Arnold y Avez.

2. SISTEMAS DINAMICOS ABSTRACTOS.

El estudio de un sistema clásico desde el punto de vista del problema ergódico lo hemos realizado a base de tres conceptos fundamentales en la teoría:

1) Un espacio fásico Γ real, cuyos puntos representan estados del sistema.
2) Un grupo de automorfismos T_t que actúa sobre Γ y que asociamos a la evolución temporal.
3) Una medida μ definida sobre Γ y que es invariante bajo T_t en virtud de las ecuaciones de movimiento del sistema.

Pues bien, si desposeemos a estos tres conceptos del significado físico concreto llegamos a un concepto nuevo que llamaremos "sistema dinámico abstracto" caracterizado por la terna (Γ, T, μ), que representa simplemente un espacio con medida invariante ante un grupo uniparamétrico de automorfismos. Las elecciones concretas de Γ, T, μ dan lugar a diferentes posibles sistemas dinámicos. Hay que resaltar que en la definición más general el grupo T puede ser un grupo discreto de automorfismos.

Dos sitemas dinámicos abstractos (Γ, T, μ) y (Γ', T', μ') son isomorfos si existe una aplicación biyectiva A de Γ sobre Γ' tal que:

$$\left.\begin{aligned} &\mu'[A(\Sigma)] = \mu(\Sigma) \quad \text{para todo } \Sigma \subset \Gamma \\ &T' = A\,T\,A^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.1)}$$

El considerar sistemas isomorfos es importante porque todos ellos presentan las mismas propiedades asintóticas, que son las que resultan relevantes en ergodicidad. Quiere ello decir que si se prueba la ergodicidad de un sistema dinámico abstracto, tal propiedad está garantizada para todos los sitemas isomorfos con el original. En este sentido la teoría no sólo va a proporcionar criterios de ergodicidad sino formas de descubrir sistemas ergódicos a partir de uno dado. Esto es así porque las propiedades en que estamos interesados dependen de la medida y de la estructura del grupo y todo ello es equivalente en sistemas isomorfos.

En cambio una formulación tan general como ésta puede tener el inconveniente de que el sistema físico real en el que estemos interesados no presente las propiedades del correspondiente sistema dinámico abstracto. Aclaremos este punto. La forma usual de estudiar los sistemas dinámicos abstractos es descubrir propiedades de los mismos válidas para todos los sistemas excepto para algunos que forman un conjunto de medida nula; y esto es razonable cuando el interés radica en estudiar un sistema abstracto como el ente general que es. Pero podría ocurrir que la clase de sistemas físicos reales en los cuales estamos interesados esté incluída en ese conjunto de medida nula, bien por la forma especial de preparación o en virtud de ciertas condiciones que ignoramos por trascender en modelo empleado. Por tanto la aplicación de la teoría general a casos particulares debe cuidarse extremadamente por no estar garantizada.

3. PROPIEDADES ERGODICAS ; JERARQUIA DE SISTEMAS.

Con objeto de definir propiedades asintóticas de los sistemas dinámicos abstractos comenzamos por introducir las definiciones ordinarias de promedios espaciales y temporales. Sea el sistema (Γ, T, μ) o (Γ, T_t, μ) según que el grupo de automorfismos sea discreto o contínuo. El promedio espacial o fásico de una función f definida en Γ, si existe, es el definido por

$$\bar{f} \equiv \int_{\Gamma} f(x)\, d\mu \qquad \text{con } x \in \Gamma \tag{VI.2}$$

Supondremos que la medida μ es finita y que se ha escogido de forma que $\mu(\Gamma) = 1$.

El promedio temporal, si existe, es el definido por

$$\left.\begin{aligned} f^* &\equiv \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) \quad \text{con } x \in \Gamma \text{ y } n \in Z^+ \text{ para el caso discreto} \\ f^* &\equiv \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t x)\, dt \quad \text{con } x \in \Gamma \text{ y } t \in R^+ \text{ para el caso contínuo} \end{aligned}\right\} \tag{VI.3}$$

Con las definiciones anteriores la ergodicidad se enuncia así : un sistema dinámico abstracto es ergódico si para toda función μ-sumable los promedios espaciales y temporales son iguales, salvo para puntos de un conjunto de medida nula. Es decir :

$$f^* = \bar{f} \qquad \text{casi por doquier en } \Gamma . \tag{VI.4}$$

Para un sistema ergódico, por tanto, el promedio temporal f^* no depende del punto inicial x .

Puede suceder que para algunos sistemas Γ sea la unión disjunta de dos conjuntos Γ_1 y Γ_2 , de medida positiva, e invariantes bajo T . En este caso el sistema (Γ, T_t, μ) se dice que es descomponible. Por supuesto un sistema descomponible no puede ser ergódico, ya que tomando

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{para } x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

el promedio f^* es, en este caso, $f(x)$, que depende de la x inicial. Un sistema indescomponible se dice tiene la propiedad de transitividad métrica y ésta es condición necesaria y suficiente para la ergodicidad de un sistema, como ya hemos tenido ocasión de demostrar en el capítulo I .

La descripción matemática de lo que es un sitema "mixing", utilizando el lenguaje abstracto que venimos empleando, proviene de abstraer lo que intuitivamente admitimos que sucede al mezclar tinta y agua en la proporción 20 % y 80 % respectivamente, por ejemplo. Basándonos en este ejemplo debido a Gibbs definimos a un sistema abstracto (Γ, T_t, μ) como "mixing" cuando para todo par A,B de conjuntos medibles se verifica

$$\lim_{t \to \infty} \mu[T_t A \cap B] = \mu(A) \cdot \mu(B) \qquad \text{(VI.5)}$$

La propiedad de "mixing" es más fuerte que la de ergodicidad en el sentido de que "mixing" implica ergodicidad. En efecto : sea A un conjunto medible de Γ e invariante bajo el grupo T_t . Para todo t se verifica

$$T_t A \cap A = A$$

Si el sistema es "mixinx" , aplicando (VI.5) resulta

$$\lim_{t \to \infty} \mu(A) = \mu(A) \cdot \mu(A)$$

con lo que $\mu(A)$ es cero o uno. Y esto no es sino una de las distintas formas de decir que existe indescomponibilidad métrica ; o lo que es lo mismo: el sistema "mixing" ha resultado ser ergódico. Por supuesto el recíproco no es cierto, como se comprueba con un simple contraejemplo : el de las traslaciones de un toro [34].

La propiedad de "mixing" es bastante más restrictiva que la de ergodicidad. Entre ambas existe una propiedad intermedia en implicación, la de "mixing" débil, que se enuncia así : un sistema dinámico abstracto (Γ, T_t, μ) es "mixing" débil si para todo par de conjuntos medibles A,B de Γ se verifica

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} |\, \mu(T_t A \cap B) - \mu(A)\, \mu(B) \,|\, dt = 0 \qquad \text{(VI.6)}$$

Interpretada en términos de la mezcla tinta-agua, la propiedad (VI.6) indica que después de un tiempo suficientemente grande la proporción de tinta en cualquier región del vaso es aproximadamente del 20 %, excepto como mucho en algunos instantes de tiempo aislados en los que la proporción podría ser distinta.

Los enunciados de la definición de "mixing" (a veces llamado "mixing" fuerte) y de "mixing" débil se han referido al caso continuo. Obviamente las mismas definiciones se adaptan sin ninguna dificultad al caso discreto (véase VI.3).

El teorema de Hopf, que se enunció en el capítulo II, precisamente lo que da es la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea "mixing" débil : la indescomponibilidad métrica de $\Gamma \times \Gamma$, producto cartesiano de Γ por sí mismo, con medida inducida por μ.

Dado que en las aplicaciones de la Teoría de Sistemas Dinámicoa Abstractos a la Física el "test" de la indescomponibilidad métrica resulta inviable en la práctica, ha constituído un avance importante el obtener otros criterios (para "mixing" débil, por ejemplo) en términos de la teoría espectral de operadores en un espacio de Hilbert. Sea $\mathcal{L}_2(\Gamma,\mu)$ el espacio de Hilbert constituído por las funciones univaluadas de Γ que sean de cuadrado μ-integrable, con producto escalar

$$< f \mid g > = \int_\Gamma \bar{f}\, g\, d\mu$$

donde hemos indicado por $\bar{f}$ la función complejo conjugada de f. Una transformación T_t definida en Γ induce en $\mathcal{L}_2$ un operador U_t definido de la siguiente forma :

$$U_t\, f(x) = f(T_t\, x) \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{L}_2$$

A partir de la definición de U_t es trivial comprobar que se trata de un operador lineal que admite inverso y que es isométrico. Por tanto U_t es un operador unitario sobre $\mathcal{L}_2$. Si t varía con continuidad U_t constituye un grupo uniparamétrico unitario continuo.

Si limitamos nuestra atención a los sistemas físicos reales interesantes, el operador U_t es habitualmente de la forma

$$U_t = \exp(\, i\, L\, t\,) \qquad \text{(VI.7)}$$

donde L es un operador autoadjunto, que en Mecánica Clásica es precisamente el operador de Liouville. Una función $f \in \mathcal{L}_2$ invariante es una función propia de U_t correspondiente al valor propio 1 (o sea, al valor propio cero del operador de Liouville) por verificar :

$$f = U_t f = e^{iLt} f$$

Los argumentos expuestos al principio de la sección 3 del capítulo I permiten establecer como condición necesaria y suficiente de ergodicidad el que todas las funciones invariantes sean constantes, casi por doquier en Γ. Dado que las funciones constantes son todas proporcionales entre sí, las constantes son funciones propias de U_t correspondientes al valor propio simple (no degenerado) uno. Si hubiera degeneración existirían funciones invariantes no constantes y no habría ergodicidad. Se llega así a una nueva formulación de dicha propiedad: el sistema (Γ, T_t, μ) es ergódico si, y solo si, uno es valor propio simple del operador inducido U_t, (o si cero es valor propio simple del operador de Liouville en sistemas físicos ordinarios).

La condición de "mixing" dada por (VI.5) se formula en lenguaje de operadores así: el sistema dinámico (Γ, T_t, μ) es "mixing" si, y solo si

$$\lim_{t \to \infty} \langle U_t f \mid g \rangle = \langle f \mid 1 \rangle \langle 1 \mid g \rangle \qquad \text{(VI.8)}$$

para todo par $f, g \in \mathcal{L}_2$, y donde 1 es la función constante 1 en Γ.

También se puede probar [35] que un sistema es "mixing" débil, en el sentido de satisfacer la relación (VI.6) si, y solo si, el único valor propio discreto de U_t es 1, siendo contínuo el resto del espectro; es decir, si las constantes son las únicas funciones propias de U_t.

Otra propiedad que sirve para reconocer a un sistema "mixing" (fuerte) puede enunciarse en términos espectrales. Un sistema dinámico (Γ, T_t, μ) se dice que tiene espectro de Lebesgue tipo L^I si existe una base ortonormal de $\mathcal{L}_2(\Gamma,\mu)$ formada por la función 1 y las funciones $f_{i,j}$, con $i \in I$, $j \in Z$, tales que

$$U_t f_{i,j} = f_{i,j+1} \qquad \text{para todo } i,j. \qquad \text{(VI.9)}$$

siendo U_t el correspondiente operador inducido por la transformación T_t. El cardinal del conjunto de índices I se llama multiplicidad del espectro de Lebesgue. Si I es infinito numerable se dice que se trata de un espectro de Lebesgue infinito numerable y si I contiene un único elemento se dice que el espectro de Lebesgue es simple. Pues bien, con esta notación se puede demostrar el siguiente teorema : Un sistema dinâmico con espectro de Lebesgue es "mixing" (fuerte) [36].

Con objeto de aclarar lo que significa la existencia de espectro de Lebesgue y presentar al mismo tiempo un ejemplo de sistema dinâmico abstracto introducimos el siguiente: sea $\Gamma = \{ (x,y) \mod. 1 \}$ el toro cuadrado de lado unidad con la medida de Lebesgue $d\mu = dx \cdot dy$ y el automorfismo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(VI.10)}$$

Como esta transformación tiene determinante unidad conserva la medida. Tomando como conjunto de puntos inicial en Γ el gato (tan usual en algún otro apartado de la Física) se obtienen los siguientes conjuntos, tras una y dos aplicaciones del automorfismo :

A $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 A$

Es sabido que el conjunto de funciones

$$f_{p,q}(x,y) \equiv e^{2\pi i(px+qy)} \qquad p,q \in Z$$

forman una base ortonormal de $\mathcal{L}_2(\Gamma,\mu)$. El automorfismo U inducido en $\mathcal{L}_2$ es tal que

$$U\, f_{p,q}(x,y) = f_{p,q}(x',y') = e^{2\pi i(px'+qy')} =$$

$$= e^{2\pi i[p(x+y)+q(x+2y)]} = e^{2\pi i[(p+q)x+(p+2q)y]} =$$

$$= f_{p+q,\,p+2q}(x,y) \qquad \text{(VI.11)}$$

Como además $f_{0,0} = 1$ se cumplen las condiciones de existencia de espectro de Lebesgue. Además se trata de un espectro de Lebesgue infinito numerable, pues en este caso $I \equiv Z$. Por tanto este sistema abstracto es "mixing" (fuerte) y, consecuentemente, ergódico.

En la jerarquía de sistemas dinámicos que estamos estableciendo le llega el turno a un nuevo tipo de sistemas, los llamados sistemas K, introducidos originariamente por Kolmogorov bajo el nombre de sistemas cuasi-regulares.

Para definir un sistema K se necesita una partición de Γ : $\alpha \equiv \{A_i\}$ $i \in I$, siendo A_i partes de Γ, disjuntas dos a dos, de medida no nula y con unión Γ. Es decir:

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \qquad \text{para } i \neq j$$

$$\mu(A_i) \neq 0 \qquad \text{para todo } i \in I$$

$$\mu\left(\Gamma - \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0$$

La partición α se dice que es medible cuando existe una clase numerable $\beta \equiv \{B_j\}$ $j \in J$, de conjuntos B_j medibles tales que:

1) Cada B_j es la unión de conjuntos de α.
2) Para cada par A_i, A_j de α existe un B_k de β tal que $A_i \subset B_k$ y $A_j \not\subset B_k$ o bien $A_i \not\subset B_k$ y $A_j \subset B_k$.

De acuerdo con la definición toda partición finita o numerable es medible. Por otra parte se consideran equivalentes dos descomposiciones que se diferencien exclusivamente en conjuntos de medida nula.

Entre las descomposiciones medibles de un conjunto Γ se puede establecer una relación de orden parcial del siguiente modo: $\alpha_1 \leq \alpha_2$ quiere decir que cada conjunto de α_1 es una unión de conjuntos de α_2. Equivale a indicar que, si la diferencia entre ambas particiones no radica en conjuntos de medida nula, α_2 representa una descomposición más fina que α_1.

Un sistema dinámico (Γ , T_t , μ) se llama sistema K cuando existe una partición medible α que cumple las tres condiciones siguientes:

1) $T_t \alpha = \alpha_t \geq \alpha$ para todo $t > 0$.

2) $\bigvee_t T_t \alpha = \mathcal{E}$

3) $\bigwedge_t T_t \alpha = \nu$

donde $\mathcal{E}$ es la descomposición puntual de Γ (la más fina que existe) y ν es la partición de Γ en la que éste es el único elemento (la más grosera que existe). El símbolo de la segunda condición expresa que $\mathcal{E}$ es la menor descomposición que contiene a todas las α_t , y el símbolo de la tercera indica que ν es la mayor partición que está contenida en todas las α_t . Por supuesto que las palabras menor y mayor tienen aquí el sentido que se deduce de la relación de orden antes enunciada. Teniendo en cuenta la irrelevancia de los conjuntos de medida nula la definición de sistema K implica que todo elemento de una descomposición invariante de Γ (para la cual $\alpha_t = \alpha$) tiene medida cero o unidad. Consecuentemente el sistema K es ergódico.

Se puede profundizar en el estudio de los sistemas K llegándose a la conclusión de que realmente su definición es mucho más restrictiva que la de ergodicidad. En concreto, los sistemas K tienen espectro de Lebesgue infinito numerable y, por tanto, presentan la propiedad de "mixing" (fuerte). En particular, puede demostrarse que el automorfismo sobre el toro en dos dimensiones definido por (VI.10) es un sistema K . La prueba de que el modelo de gas de Boltzmann-Gibbs, citado en el apartado VI.1, exhibe ergodicidad, consiste realmente en demostrar que tal modelo es un sistema K y, consecuentemente, "mixing" y ergódico [2].

Finalmente introduzcamos el último grado en la jerarquía : los sistemas de Bernouilli. Sea $Z_n = \{ 0,1,2,\ldots n-1 \}$ el conjunto de los n primeros números enteros no negativos. Tomemos como espacio Γ de un sistema abstracto el producto cartesiano $Z_n^{\,Z}$. Quiere esto decir que los elementos de Γ son series bilaterales infinitas del tipo

$$\ldots ; a_{-2} ; a_{-1} ; a_0 ; a_1 ; a_2 ; \ldots \qquad \text{con} \quad a_i \in Z_n$$

La medida puede introducirse de esta forma. Partiendo de una medida normalizada μ en Z_n :

$$\mu(0) = p_0 \;\; ; \;\; \mu(1) = p_1 \;\; ; \ldots ; \;\; \mu(n-1) = p_{n-1} \;\; ; \;\; \sum_i p_i = 1$$

se puede definir para los "cilindros elementales" A_i^j

$$A_i^j \equiv \{ (\ldots;a_{-1};a_0;a_1;\ldots) \in \Gamma \mid a_i = j \}$$

la medida $\mu(A_i^j) \equiv p_j$.

Como los conjuntos medibles de Γ se pueden obtener a partir de intersecciones de diferentes A_i^j basta definir la medida de la intersección

$$A_{i_1}^{j_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}^{j_k} \qquad i_1,\ldots,i_k \quad \text{todos diferentes.}$$

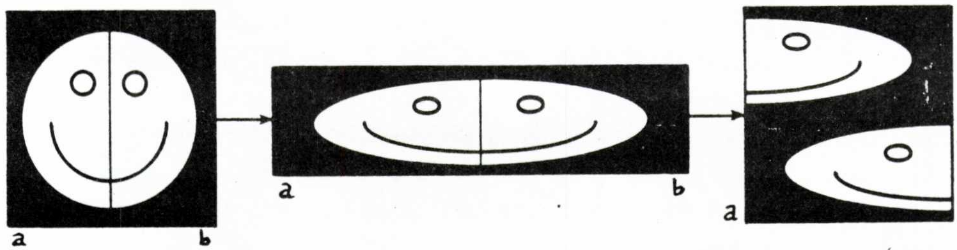
Tal medida se define como el producto de sus respectivas medidas. Quiere ello decir que si un conjunto de Γ es tal que para sus distintos puntos se cumple $a_{i_1} = j_1$; ... ; $a_{i_k} = j_k$ su medida será el producto $p_{j_1} \ldots p_{j_k}$.

El automorfismo T lo tomaremos como el que asocia al elemento $\{a_i\}$ de Γ el elemento $\{a_{i+1}\}$,de modo que se trata de una simple traslación de lugar a la derecha para todos los elementos de la serie bilateral. Esta transformación es invertible y conserva la medida [37].

Un sistema dinámico abstracto (Γ, T, μ) del tipo que acabamos de definir se llama esquema de Bernouilli y se denota por $B(p_0; \ldots ; p_{n-1})$. Un ejemplo usual lo constituye el lanzamiento sucesivo de una moneda al aire. Los elementos de $\Gamma = Z_2^Z$ son series bilaterales infinitas de ceros (caras, por ejemplo) y unos (cruces). A_i^0 representa el conjunto de elementos de Γ en los que en el lanzamiento i-ésimo se obtuvo cara . Por tanto,en este caso,parece natural adoptar como medida

$$\mu(A_i^j) = \text{prob}(A_i^j) = \tfrac{1}{2}$$

Otro ejemplo típico de sistema de Bernouilli es el constituído tomando como Γ el cuadrado de lado unidad y como operador de evolución (no del tipo hamiltoniano en este caso por tratarse del caso discreto) la llamada transformación del panadero ("baker's transformation") porque su efecto recuerda,en cierta forma,el moldeado de una masa. Si en el instante t un punto fásico representativo es el (x,y) , en el instante t+1 le corresponde aquel que se obtiene reduciendo su ordenada a la mitad y ampliando su abcisa al doble módulo uno ; en la figura adjunta se indica el resultado de aplicar esta transformación a un cuadrado en el que figura la imagen de una "sufrida" silueta.



La fórmula analítica para esta transformación es:

$$T\,(x,y) = (x',y') = \begin{cases} \left(2x\;,\;\tfrac{1}{2}\,y\right) & \text{si } \; 0 \le x \le \tfrac{1}{2} \\ \left(2x-1\;,\;\tfrac{1}{2}(y+1)\right) & \text{si } \; \tfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \qquad \text{(VI.12)}$$

Para comprobar que se trata realmente de un sistema de Bernouilli conviene escribir x e y en base dos, con lo que un punto fásico se podrá escribir en la forma $(\,0{,}x_1x_2x_3\ldots\,;\,0{,}y_1y_2y_3\ldots\,) \equiv (\,\ldots x_3x_2x_1\,;\,y_1y_2y_3\ldots)$ donde x_i , y_i toman valores en $\{\,0,1\,\}$. El efecto de la transformación es eliminar el primer dígito "decimal" de x y añadírselo a y :

$$T\,(\,0{,}x_1x_2x_3\ldots\;,\;0{,}y_1y_2y_3\ldots\,) = (\,0{,}x_2x_3x_4\ldots\;,\;0{,}x_1y_1y_2\ldots)$$

lo cual representa una traslación de todos los elementos de la serie bilateral. Además la transformación es trivialmente invertible y conserva la medida. Se trata, por tanto, de un verdadero sistema de Bernouilli.

Por salirse de los límites que nos hemos propuesto al redactar este trabajo omitimos la demostración de que todo sistema de Bernouilli es un sistema K [38]. Con ello queda coronada la jerarquía de sistemas que resumimos con el siguiente esquema, donde la flecha indica implicación :

Sistema de Bernouilli $\Rightarrow$ Sistema K $\Rightarrow$ Sistema "mixing" (fuerte) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema "mixing" débil $\Rightarrow$ Sistema ergódico .

Para finalizar indicaremos que un sistema dinámico puede mostrar un comportamiento totalmente determinista a nivel microscópico y cuando se estudia a escala macroscópica presentar una evolución completamente aleatoria. Razonando, por ejemplo, con el modelo $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ del lanzamiento de monedas, se comprueba que su comportamiento macroscópico es aleatorio. Esto es una propiedad característica de los sistemas de Bernouilli hasta el punto de que a veces se utiliza para su definición. Se comprende así la equivalencia entre sistemas de Bernouilli y ruletas circulares perfectas [39].

4. ENTROPIA Y SISTEMAS K .

Para definir la entropía de un sistema clásico se parte de la división del espacio de las fases en celdas. Y esto no es más que utilizar una cierta partición del espacio Γ . Dado que los sistemas K presuponen la existencia de una partición de Γ parece plausible la posibilidad de una generalización del concepto de entropía para sistemas dinámicos abstractos y, en particular, para sistemas K . Tal generalización la llevó a cabo Kolmogorov [40].

Sea $\alpha \equiv \{A_i\}$, $i \in I$, una partición medible finita del espacio Γ . Se define la entropía de la misma como

$$h(\alpha) \equiv - \sum_{i \in I} \mu(A_i) \ln \mu(A_i) \qquad \text{(VI.13)}$$

De acuerdo con ello, si la partición se efectúa mediante N elementos de igual medida

$$h = -N \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = \ln N$$

Si β es otra partición con N elementos un cálculo sencillo permite escribir [41]

$$h(\beta) \leq \ln N$$

Por supuesto dos particiones equivalentes tienen la misma entropía. Además, si $h(\alpha) = 0$ se tiene que todas las $\mu(A_i)$ son nulas salvo una de ellas, que valdrá la unidad.

Se define la entropía de una partición medible y finita α , con respecto a un automorfismo T , en la forma

$$h(\alpha, T) = \lim_{n \to \infty} \frac{h(\alpha \vee T\alpha \vee \ldots \vee T^{n-1}\alpha)}{n} \qquad \text{(VI.14)}$$

donde $\alpha \vee \beta$ indica la menor partición que contiene a α y β y cuyos elementos son $A_i \cap B_j$. (Algo así como un "mínimo común múltiplo generalizado"; recordemos que más pequeña indica menos fina y contener quiere decir más detallada). La demostración de la existencia del límite anterior requiere la introducción del concepto de entropía de una partición respecto de otra [42].

Finalmente, dado el sistema (Γ, T, μ) se define su entropía, o más propiamente, la entropía del automorfismo T, como

$$h(T) \equiv \sup h(\alpha, T) \qquad \text{(VI.16)}$$

que indica la menor cota superior para la entropía de todas las particiones finitas y medibles de Γ, con relación à T. Por supuesto $h(T) \geq 0$.

Por definición la entropía de un grupo contínuo de automorfismos T_t se toma como $h(T_1)$.

A partir de la definición de entropía generalizada se pueden deducir una serie de teoremas y corolarios (véase el libro de Arnold y Avez [11] y, en particular, los teoremas de Kolmogorov-Sinai y Kouchnirenko, en el cap. 2) que permiten una descripción cuantitativa de la jerarquía de los sistemas dinámicos. Así, la entropía infinita es la correspondiente a sistemas estocásticos. Los sitemas K tienen entropía positiva ($h > 0$). Como la entropía de un sistema de Bernouilli $B(p_1; p_2; \ldots ; p_k)$, de acuerdo con la definición, se puede escribir de la forma

$$h(T) = - \sum_{i=1}^{k} p_i \ln p_i$$

resulta que todo sistema de Bernouilli es, por supuesto, un sistema K , como ya habíamos anticipado. Los sistemas clásicos, entendiendo por tales aquellos cuya evolución se define mediante ecuaciones diferenciales, aunque no sean necesariamente de forma hamiltoniana, tienen entropía finita (teorema de Kouchnirenko). Quiere ello decir que entre los sistemas clásicos los habrá que son sistemas K , pero no es posible una identificación total entre ambos.

En cuanto a los sistemas con entropía cero, que no son sistemas K , se han construído ejemplos de los dos tipos : clásicos y no clásicos. Con tales construcciones se ha comprobado, al presentar espectro de Lebesgue infinito numerable, que entropía cero no implica ausencia de propiedades de "mixing".

5. RELACION CON LOS SISTEMAS FISICOS REALES .

Al igual que hicimos en el capítulo III ,tras exponer las ideas matemáticas abstractas (en este caso de Dinámica General de Sistemas) se trata de contrastar su aplicabilidad a los sistemas físicos reales. Si esto no fuera posible tal teoría sería por completo ajena a la Física.

Puesto que el reconocer si un sistema es ergódico o "mixing",en el caso de sistemas reales,no es viable mediante el "test" de la indescomponibilidad métrica,se trata de argumentar si los criterios basados en propiedades espectrales del tipo de los expuestos en este capítulo son más aptos para detectar ergodicidad.

En general,los sistemas físicos que interesan en Mecánica Estadística son, desafortunadamente,muy diferentes de los que se han podido tratar por procedimientos espectrales. No obstante existen resultados importantes a los que se ha llegado a través de la Dinámica General de Sistemas y,entre éstos,uno esencial es el ya referido de Sinai acerca de la ergodicidad del gas de Boltzmann-Gibbs.

La demostración del teorema de Sinai no es elemental. Pasa por la introducción de una clase de sistemas dinámicos,llamados sistemas C ,caracterizados por unas ciertas propiedades locales que originan trayectorias asintóticamente divergentes unas de otras. La existencia de estas trayectorias es relacionable con la positividad de la entropía que es típica de los sistemas K . Y es a partir de la relación que establece netre sistemas C y sistemas K como Sinai llegó a demostrar que el modelo de Boltzmann-Gibbs es ciertamente un sistema K y,por consiguiente ergódico. En este sistema las propiedades ergódicas se interpretan como consecuencia de las colisiones elásticas entre las esferas que representan las moléculas gaseosas.

Aunque los resultados obtenidos hasta ahora mediante esta Teoría Ergódica Moderna no justifican,en nuestra opinión,las esperanzas que se pusieron en ella a raíz del resultado de Sinai,continúa siendo el marco en que se realizan las investigaciones en torno al Problema Ergódico.

REFERENCIAS

[1] L. BOLTZMANN, Wien, Ber. 63 , 679 (1871).

J. C. MAXWELL, Trans. Camb. Phil. Soc. 12 , 547 (1879).

ambos citados en pp. 366-367 de

S. G. BRUSH, The Kind of Motion we Call Heath, vol.2, North Holland, Amsterdam (1976) . Ver sec. 10.10 ,10.11 para una amplia referencia y documentación en relación a los orígenes del problema ergódico.

[2] YA G. SINAI, Sov. Math. Dokl. 4 , 1818 (1963).

YA G. SINAI, "Ergodicity of Boltzmann's Gas Model" pp. 559-573 en Statistical Mechanics (I.U.P.A.P. 1966,Copenhague),ed. T. Bak , Benjamin (1967).

[3] P.y T. EHRENFEST, Encykl. Math. Wiss. 4 , No.32 (1911). Traducción inglesa: The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics, Cornell Univ. Press, Ithaca, N.Y. (1959).

ver también BRUSH [1].

[4] A. I. KHINCHIN, Mathematical Foundations of Statistical Mechanics ; Dover Pub., N. Y. (1949). Original ruso (?)

[5] M. PLANCHEREL, Arch. Sci. Phys. [4] 33 ,254 (1912) ; Ann. Phys. 42 , 1061, (1913).

A. ROSENTHAL, Ann. Phys. 42 , 796 (1913).

traducción inglesa de ambos artículos por

S. G. Brush, Transport Theory and Statistical Physics 1 ,287 (1971).

[6] E. FERMI, Physik Z. 24 ,261 (1923). Para una amplia referencia ver

D. TER HAAR, Rev Mod. Phys. 27 289-338 ,ap II, (1955).

[7] P. y T. EHRENFEST ,ref [3].

[8] G. D. BIRKHOFF, Proc. Nat. Acad. Sci. 17 ,650 y 656 (1931).

J. VON NEUMANN, Proc. Nat. Acad. Sci. 18 , 70 y 263 (1932).

E. HOPF, Proc. Nat. Acad. Sci. 18 , 204 y 333 (1932).

[9] J. VON NEUMANN, Z. Physik 57 , 30 (1929).

[10] R. JANCEL, Les fondements de la Mécanique Statistique Classique et Quantique , Gauthier-Villars, Paris (1963). Trad. inglesa Foundations of Classical and Quantum Statistical Mechanics, Pergamon Press, Oxford, (1969).

[11] V. I. ARNOLD y A. AVEZ, Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique, Gauthier-Villars, Paris (1966). Traducción inglesa: Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, N.Y. (1968).

P. BILLINGSLEY, Ergodic Theory and Information, John Wiley and Sons, N. Y. (1965).

[12] I. E. FARQUHAR, Ergodic Theory in Statistical Mechanics, Interscience Pub., London (1964); ap.2 .

[13] P. R. HALMOS, Lectures on Ergodic Theory, Chelsea, N. Y. (1958).

[14] Ver, por ejemplo, A. I. Khinchin, ref. [4], pág. 25.

[15] R. M. LEWIS, Arch. Rational Mech. Anal. 5, 355 (1960).

[16] C. TRUESDELL en Ergodic Theories ("Enrico Fermi" XIV Course, Varenna, 1960), ed. P. Caldirola, Acad. Press, N. Y. (1961).

[17] J. VON NEUMANN, primer artículo ref. [8].

[18] Ver, por ejemplo:

ALAN J. WEIR, Lebesgue Integration and Measure, Cambridge Univ. Press, 1973, pág. 20 .

[19] A. I. KHINCHIN, ref [4], sec. II.7 .

[20] A. I. KHINCHIN, ref. [4], sec. III.12 .

[21] A. I. KHINCHIN, ref. [4], capítulo III .

[22] Ver, por ejemplo:

H. CRAMER, Métodos Matemáticos de Estadística, Aguilar, Madrid (1950), versión original (1946); sec. 17.4 .

[23] C. TRUESDELL, ref. [16], pág. 49 .

[24] C. TRUESDELL, ref. [16], pág. 50.

[25] P. MAZUR y J. VAN DER LINDEN, J. Math. Phys. 4, 271 (1963).

[26] R. JANCEL, ref. [10], sec. III.3 .

[27] J. VON NEUMANN, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Berlin, 1932).

Traducciones:
- Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica, C.S.I.C., Ins. Mat. Jorge Juan, Madrid (1949).
- Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton (1955).

Ver cap. V.

[28] N. G. VAN KAMPEN, Physica 20, 603 (1954).

[29] M. FIERZ, Helv. Phys. Acta , 28 , 705 (1955).
I. E. FARQUAR y P. T. LANDSBERG, Proc. Roy. Soc. A 239 ,134 (1957).
P. BOCCHIERI y A. LOINGER, Phys. Rev. 111 , 668 (1958) ; Phys. Rev. 114 , 948 (1959).

[30] A. LOINGER en Ergodic Theories ,ref. [16].

[31] G. LUDWIG en Ergodic Theories,ref. [16].

[32] G. M. PROSPERI y A. SCOTTI, J. Math. Phys. 1 ,218 (1960).

[33] R. JANCEL, ref. [10], cap. IV.

[34] V. I. ARNOLD y A. AVEZ, ref. [11],ejemplo 8.5 .

[35] P. HALMOS, ref. [13], págs. 39-41 .

[36] V. I. ARNOLD y A. AVEZ, ref. [11], Teorema 10.4 .

[37] V. I. ARNOLD y A. AVEZ, ref. [11], ejemplo 2.2 .
P. BILLINGSLEY, ref. [11],sec.I.1 .

[38] V. I. ARNOLD y A. AVEZ, ref. [11], ejemplo 11.2 .

[39] J. LEBOWITZ y O. PENROSE, Phys. Today 26(2) , 23(Feb. 1973).

[40] A. N. KOLMOGOROV, Dokl. Akad. Nauk. 124 , 754 (1959).

[41] V. I. ARNOLD y A. AVEZ, ref. [11], ejemplo 12.2 .

[42] P. BILLINGSLEY, ref. [11], secc. II.6 y II.7 .
V. I. ARNOLD y A. AVEZ, ref. [11], definición 12.4 - Teorema 12.21 .